解析学I

近藤弘一

最終更新日：平成14年9月12日

目 次

1　数列と極限

§ 1.1　実数

数にはいろいろな種類がある．それらのうち普段よく用いるものを列挙する：

- **自然数（natural number）**：$1, 2, 3, \cdots$　　自然数全体の集合 $= \mathbb{N}$
- **整数（integer）**：$\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$　　整数全体の集合 $= \mathbb{Z}$
- **有理数（rational number）**：$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{3}, \cdots$ 分数で表される数 有理数全体の集合 $= \mathbb{Q}$
- **無理数（irrational number）**：$\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \pi, \cdots$ 分数で表せない数
- **実数（real number）**：有理数と無理数をあわせた数　　実数全体の集合 $= \mathbb{R}$
- **複素数（complex number）**：$\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$　　複素数全体の集合 $= \mathbb{C}$

上記の数の集合には包含関係があり自然な拡張となっている：

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}. \tag{1.1.1}$$

問　**（実数の小数表現）**　有理数は有限小数または循環小数となる．無理数は循環しない無限小数となる．これを示せ．

□

本講義では単に数と述べるときは実数を指すものとする．

§ 1.2　数直線

実数は直線と一対一対応する．

- 直線は切目なくつながっている．直線は連続している．実数もまた連続して存在する．
→連続性については直感的な理解で十分．
- 二つの実数の間には必ず大小関係がある．表記は以下のように行なう：

$$a > b, \qquad a < b. \tag{1.2.1}$$

$$a \geq b, \qquad a \leq b, \tag{1.2.2}$$

$$a \geqq b, \qquad a \leqq b, \tag{1.2.3}$$

$$a \geqslant b, \qquad a \leqslant b. \tag{1.2.4}$$

§ 1.3 区間

定義（区間） 変数 x のとり得る範囲に関して以下の名称を定義する：

- **開区間（open interval）**： $a < x < b, \quad (a, b)$.
- **閉区間（closed interval）**： $a \leq x \leq b, \quad [a, b]$.

□

問 教科書（p.5）問題 1-2 1. □

§ 1.4 絶対値

定義（絶対値） 実数 a の**絶対値（absolute value）**を

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases} \tag{1.4.1}$$

と定義する. □

問（絶対値の別の定義） 関数 $\max(x, y)$ を

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & (x > y) \\ x & (x = y) \\ y & (x < y) \end{cases} \tag{1.4.2}$$

と定義するとき，$|a| = \max(a, -a)$ が成立することを示せ. □

定理（絶対値の性質） 絶対値に関して以下の性質が成り立つ：

(1) $|-a| = |a|$.

(2) $|ab| = |a||b|$.

(3) $|a + b| \leq |a| + |b|$.

(4) $|a - b| \geq |a| - |b|$.

□

問（絶対値の性質） 性質 (1)–(4) を示せ.

（証明）a と b とをそれぞれ正，負，零の場合に分け，全ての組合わせにおいて議論を行なう. □

§ 1.5　数列

定義（**数列**）　**数列**（**sequence**）とは数を順番に並べたものであり，

$$\begin{aligned} & a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots && (1.5.1)\\ & = \{\, a_n \,|\, n = 1, 2, 3, \cdots \} && (1.5.2)\\ & = \{\, a_n \,|\, n \in \mathbb{N} \} = \{a_n\} && (1.5.3) \end{aligned}$$

と書き表す．n 番目の数を**第 n 項**と呼ぶ．第 n 項を n に関する式で書き下したものを**一般項**（**general term**）と呼ぶ．第 n 項，第 $n+1$ 項，$\cdots$，第 $n+k$ 項の間の関係を書き下した式を**漸化式**（**recurrence relation**）と呼ぶ．

□

例（**数列の一般項と漸化式の具体例**）

$$\{a_n\} = 1, 2, 3, 4, 5, \cdots \qquad \text{一般項：}\ a_n = n\,, \qquad \text{漸化式：}\ a_{n+1} - a_n = 1\,. \tag{1.5.4}$$

$$\{a_n\} = 1, 4, 7, 10, 13, \cdots \qquad \text{一般項：}\ a_n = 3n - 2\,, \qquad \text{漸化式：}\ a_{n+1} - a_n = 3\,. \tag{1.5.5}$$

$$\{a_n\} = 2, 4, 8, 16, 32, \cdots \qquad \text{一般項：}\ a_n = 2^n\,, \qquad \text{漸化式：}\ a_{n+1} = 2a_n\,. \tag{1.5.6}$$

□

数列についていくつか種類をあげる．

定義（**等差数列**）　数列 $\{a_n\}$ の隣り合う項の差が一定の数列を**等差数列**（**arithmetical progression sequence**）と呼ぶ．すなわち，漸化式と一般項とがそれぞれ

$$a_{n+1} - a_n = a\,, \qquad a_n = a\,n + b \tag{1.5.7}$$

と表される数列を指す．

□

定義（**等比数列**）　数列 $\{a_n\}$ の隣り合う項の比が一定の数列を**等比数列**（**geometrical progression sequence**）と呼ぶ．すなわち，漸化式と一般項とがそれぞれ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r\,, \qquad a_n = a\,r^{n-1} \tag{1.5.8}$$

と表される数列を指す．

□

例（**等差数列と等比数列の具体例**）　数列（1.5.4）は $a_{n+1} - a_n = 1$ を満たすので等差数列である．数列（1.5.5）は $a_{n+1} - a_n = 3$ を満たすので等差数列である．数列（1.5.6）は $a_{n+1}/a_n = 2$ を満たすので等比数列である．

□

§ 1.6　数列の極限

　数列 $\{a_n\}$ が

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots \tag{1.6.1}$$

と与えられたとする．この数列 $\{a_n\}$ は n が大きくなるにつれて 0 にどんどんと近づいて行く．このことを数学的には，数列 $\{a_n\}$ は**極限（limit）**が存在し 0 に**収束する（convergent），**という．一般的には次のように表現する．

定義　**（数列の極限）**

$$n\text{ が大きくなるにつれて，} \tag{1.6.2}$$

$$a_n\text{ は限りなくある確定した有限値 }a\text{ に近づいて行く．} \tag{1.6.3}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} a_n = a \tag{1.6.4}$$

$$\Leftrightarrow a_n \to a \quad (a \to \infty) \tag{1.6.5}$$

$$\Leftrightarrow a_n\text{ の極限は }a\text{ である．} \tag{1.6.6}$$

$$\Leftrightarrow a_n\text{ は }a\text{ に収束する．} \tag{1.6.7}$$

収束しない場合を**発散する（divergent）**という．　□

注意　**（数列の極限に関する注意）**　数列（1.6.1）は $a_n = 1/n > 0$ であるので，a_n がいかに 0 に近づいたとしても，決して 0 になることはない．$a_n \neq 0$ である．$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ の意味はあくまでも，数列 a_n は 0 に近づいて行く，という意味である．　□

§ 1.7 発散する数列のいろいろ

例 **（プラス無限大に無限確定な数列）**

$$\{a_n\} = 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots. \tag{1.7.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty. \tag{1.7.2}$$

a_n は**プラス無限大（∞）に発散**する．a_n は**無限確定**である． □

例 **（マイナス無限大に無限確定な数列）**

$$\{a_n\} = -1, -2, -3, \cdots, -n, \cdots. \tag{1.7.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty. \tag{1.7.4}$$

a_n は**マイナス無限大（$-\infty$）に発散**する．a_n は無限確定である． □

例 **（有限不確定な数列）**

$$\{a_n\} = 1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots. \tag{1.7.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \quad ：発散. \tag{1.7.6}$$

有限な値に確定しないので a_n は発散する．$-1 \leq a_n \leq 1$ が成立している．a_n は有限の範囲内におさえられている．a_n は**有限不確定**である． □

例 **（無限不確定な数列）**

$$\{a_n\} = 1, -2, 3, -4, \cdots, (-1)^{n-1}n, \cdots. \tag{1.7.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}n \quad ：発散. \tag{1.7.8}$$

a_n は有限な値に確定しない．$|a_n|$ は増大して行く．ゆえに a_n は**無限不確定**である． □

§ 1.8 数列の極限に関する定理

定理 **（数列の極限に関する定理）**

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a\,. \tag{1.8.1}$$

□

定理 **（数列の極限に関する定理）**　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に関して極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b \tag{1.8.2}$$

が存在するとき，以下の関係式が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b\,. \tag{1.8.3}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha\, a_n + \beta\, a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\, a + \beta\, b\,. \tag{1.8.4}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = ab\,. \tag{1.8.5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}\,. \tag{1.8.6}$$

ただし α, β は定数とする.

□

定理 **（はさみうちの定理）**　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が

$$a_n \le b_n \le c_n\,, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{1.8.7}$$

を満たすとき,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a \tag{1.8.8}$$

ならば,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a \tag{1.8.9}$$

が成り立つ.

□

§ 1.9 収束する数列のいろいろ

$\boxed{\text{例}}$ **（負巾で表される数列の極限）** 以下の一般項をもつ数列をそれぞれ考える：

$$a_n = \frac{1}{n}\,, \qquad a_n = \frac{1}{n^2}\,, \qquad a_n = \frac{1}{n^3}\,, \qquad \cdots\,, \qquad a_n = \frac{1}{n^p}\,, \qquad \cdots \tag{1.9.1}$$

すべての数列に対して $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．これは標語的に書くと $a_\infty = \frac{1}{\infty} = 0$ である．このとき数列は有限確定である． □

$\boxed{\text{例}}$ **（等比数列の極限）**　等比数列 $a_n = r^n$ $(r > 0)$ の極限を考える．(i) $r > 1$, (ii) $r = 1$, (iii) $r > 1$ の場合に分けて議論する．まず，(i) $r = 1$ のとき，常に $a_n = 1$ である．極限は 1 である．つぎに，(iii) $r > 1$ のとき，$r = 1 + h$ $(h > 0)$ とおく．このとき $r > 1$ をみたす．a_n を h を用いて書き下すと

$$a_n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} h^k \tag{1.9.2}$$

を得る．ここで $\binom{n}{k}$ は**二項係数（binomial coefficient）**であり，

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{1.9.3}$$

と定義する．$n!$ は**階乗（fractorial number）**であり，

$$n! = n \times (n-1)!\,, \qquad 0! = 1 \tag{1.9.4}$$

と再帰的に定義する．a_n をあらためて書き直すと

$$a_n = (1 + nh) + \left(\frac{n(n-1)}{2}\, h^2 + \cdots + n\, h^{n-1} + h^n \right) \tag{1.9.5}$$

となる．第三項以降を足したものは正となるので，

$$a_n > 1 + nh \tag{1.9.6}$$

を得る．$n \to \infty$ のとき $1 + nh \to \infty$ より $a_n \to \infty$ を得る．最後に，(i) $r < 1$ のときを考える．$h > 0$ を用いて r を $r = 1/(1+h)$ と置き換える．このとき $r < 1$ を満たす．h を用いて a_n を書き下すと，

$$a_n = \frac{1}{(1+h)^n} = \frac{1}{(1+nh) + \left(\frac{n(n-1)}{2}\, h^2 + \cdots + h^n \right)} < \frac{1}{1+nh} \tag{1.9.7}$$

を得る．不等式

$$0 < a_n < \frac{1}{1+nh} \tag{1.9.8}$$

が成立する．$n \to \infty$ のとき $1/(1+nh) \to 0$ であるから，はさみうちの定理より $a_n \to 0$ を得る．以上をまとめると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & (r < 1) \\ 1 & (r = 1) \\ \infty & (r > 1) \end{cases} \tag{1.9.9}$$

が求まる．

□

例　**（有理式で表される数列の極限）**　一般項が

$$a_n = \frac{2n^2+1}{3n^2+5n-1} \tag{1.9.10}$$

により与えられる数列を考える．定理を適用して計算を試みる．分子分母の極限をとり，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+5n-1} = \frac{\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)}{\lim_{n\to\infty}(3n^2+5n-1)} = \frac{\infty}{\infty}\,. \quad \leftarrow\text{不確定} \tag{1.9.11}$$

を得るがこれは誤りである．そもそも分子分母はそれぞれ発散するので定理は適用不可である．あらためて計算を行なう：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+5n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{5}{n}-\dfrac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{5}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)} \tag{1.9.12}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2) + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3) + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{n}\right) + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{2+0}{3+0-0} = \frac{2}{3}\,. \quad \leftarrow\text{有限確定} \tag{1.9.13}$$

今回は有限確定となり極限が求まる．計算の途中においては，定理が適用可能であるかの判断は難しい．最終形まで計算した結果が有限確定または無限確定であれば，途中の計算も定理が適用可能であることが多い．

次に一般項が

$$a_n = \frac{n^2+5n+1}{n+2} \tag{1.9.14}$$

で与えられる数列を考える．式を変形して極限を考える：

$$a_n = \frac{n^2+5n+1}{n+2} = \frac{n+5/n+1/n^2}{1+2/n} \to \frac{\infty}{1} = \infty\,. \qquad \leftarrow\text{無限確定} \tag{1.9.15}$$

最後に一般項が

$$a_n = \frac{n+4}{n^2-3n+1} \tag{1.9.16}$$

である数列の極限を考える．式を変形して極限を考える：

$$a_n = \frac{n+4}{n^2-3n+1} = \frac{1/n+4/n^2}{1-3/n+1/n^2} \to \frac{0+0}{1-0+0} = \frac{0}{1} = 0\,. \qquad \leftarrow\text{有限確定} \tag{1.9.17}$$

以上をまとめると，有理式で表される数列の極限は，有理式の最大次数の巾で分子分母を割った後に極限をとればよい．

□

例 **（根号を含む数列の極限）**　一般項が

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+3} \tag{1.9.18}$$

で与えられる数列の極限を考える．式を次のように変形した後に極限をとる：

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+3} = \frac{\sqrt{n/n^2}}{1+3/n} = \frac{\sqrt{1/n}}{1+3/n} \to \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0\,. \tag{1.9.19}$$

□

問　教科書（p.12）第 1 章演習問題. □

問　次の漸化式で与えられる数列の一般項と極限を求めよ.

(1) $a_{n+1} = p\,a_n + q$.

(2) $a_{n+2} = 2p\,a_{n+1} + q\,a_n$.

(答え) (1)

$$a_n = \begin{cases} p^{n-1}\left(a_1 - \dfrac{q}{1-p} + \dfrac{a}{1-p}\right) & (p \neq 1) \\ (n-1)q + a_1 & (p = 1) \end{cases} \tag{1.9.20}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & (|p| \geq 1) \\ 0 & (|p| < 1) \end{cases} \tag{1.9.21}$$

(2)

$$a_n = c_1\,\lambda_1^{n-1} + c_2\,\lambda_2^{n-1} \tag{1.9.22}$$

$$\lambda_1 = p + \sqrt{p^2+q}\,, \qquad \lambda_2 = p - \sqrt{p^2+q}\,, \tag{1.9.23}$$

$$c_1 = \frac{a_1\lambda_2 - a_2}{-2\sqrt{p^2+q}}\,, \quad c_2 = \frac{a_2 - a_1\lambda_1}{-2\sqrt{p^2+q}} \tag{1.9.24}$$

$|\lambda_1| < 1$ かつ $|\lambda_2| < 1$ のとき a_n は 0 に収束する．それ以外は発散する． □

公式

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \tag{1.9.25}$$

□

問　極限 $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$ を求めよ. □

§ 1.10　級数

級数（series）とは数列 $\{a_n\}$ の和である．式では

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1.10.1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n \tag{1.10.2}$$

と書き表す．加法（足し算）は有限回の演算においてのみ定義されているので，式（1.10.1）は形式的な和である．厳密に級数を定義するには次のように考える．まず第 n 項までの有限和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{1.10.3}$$

を考える．これを**第 $\boldsymbol{n}$ 部分和（the $\boldsymbol{n}$-th partial sum）**と呼ぶ．S_n に関する数列

$$\{S_n\} = S_1, S_2, \cdots, S_n \tag{1.10.4}$$

を考える．数列 $\{S_n\}$ の極限

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n \tag{1.10.5}$$

が存在したとする．このとき級数 $\sum a_n$ は存在し，その値は

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \tag{1.10.6}$$

で与えられると定義する．極限 S が存在するとき級数 $\sum a_n$ は収束すると呼ぶ．極限 S が存在しない場合は級数 $\sum a_n$ は発散すると呼ぶ．

例 **（等比級数）**　等比数列 $\{a_n = a\,r^{n-1}\}$ の無限和を**等比級数（geometrical progression series）**と呼び，

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a\,r^{n-1} \tag{1.10.7}$$

と書き表す．等比級数は

$$S = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & (|r| < 1) \\ \text{発散} & (|r| \geq 1) \end{cases} \tag{1.10.8}$$

となる．

（証明）第 n 部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a\,r^{k-1} = a(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) \tag{1.10.9}$$

を考える．$r = 1$ のとき，

$$S_n = a(1 + 1 + \cdots + 1) = a\,n \tag{1.10.10}$$

となる．つぎに $r \neq 1$ のとき，等式

$$1 - r^n = (1-r)(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) \tag{1.10.11}$$

を用いると S_n は

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r} \tag{1.10.12}$$

と書ける．以上より

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a\,n & (r = 1) \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1) \end{cases} = \begin{cases} \pm\infty & (r = 1) \\ \dfrac{a}{1-r} & (-1 < r < 1) \\ \text{不確定} & (r \leq -1) \end{cases} \tag{1.10.13}$$

となる．ただし無限大の符号は a の符号 $\operatorname{sgn}(a) = a/|a|$ で決まる．証明終り．　□

問 **（1 を根にもつ多項式の因数分解）**　以下の等式を示せ．

$$1 - r^n = (1-r)(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1})\,. \tag{1.10.14}$$

□

注意 **（初項が異なる級数）**　級数が

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a\, r^n \tag{1.10.15}$$

と定義されるときの値を考える．部分和は

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a\, r^n = a(1 + r + r^2 + \cdots + r^n) = a\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \tag{1.10.16}$$

となるから，結局級数は

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \begin{cases} \frac{a}{1-r} & (|r| < 1) \\ \text{発散} & (|r| \geq 1) \end{cases} \tag{1.10.17}$$

と得られる．

□

例 **（等比級数の具体例）**

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \tag{1.10.18}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) \tag{1.10.19}$$

$$= a(1 + r + r^2 + \cdots) \tag{1.10.20}$$

$$= \frac{a}{1 - r} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1\,. \tag{1.10.21}$$

または

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{1.10.22}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \tag{1.10.23}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \tag{1.10.24}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 \tag{1.10.25}$$

□

例　**（等比級数の具体例）**

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots \tag{1.10.26}$$

$$= a(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots) \tag{1.10.27}$$

$$= \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \tag{1.10.28}$$

または

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \tag{1.10.29}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{3^n} \tag{1.10.30}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2} \tag{1.10.31}$$

□

例　**（等比級数の具体例）**

$$0.9999\cdots = 1\,. \tag{1.10.32}$$

（証明）

$$0.999\cdots = 9 \times (0.111\cdots) = 9 \times \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n \tag{1.10.33}$$

$$= \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) \tag{1.10.34}$$

$$= a(1 + r + r^2 + \cdots) \tag{1.10.35}$$

$$= \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1\,. \tag{1.10.36}$$

□

問　教科書（p.172）問題 7-1.　□

問　**（級数の計算）**

$$(1)\quad \sum_{n=0}^{\infty} a\,r^n \qquad (2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} a\,r^n \qquad (3)\quad \sum_{n=2}^{\infty} a\,r^n \tag{1.10.37}$$

$$(4)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} \tag{1.10.38}$$

$$(5)\quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2\cdot 3^n + 3\cdot 4^n}{4\cdot 5^n} \tag{1.10.39}$$

□

§ 1.11 数列の有界性と単調性

$\boxed{\textbf{定義}}$ **（有界数列）** 数列 $\{a_n\}$ に対して次の性質を定義する.

- $a_n \leq M$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は**上に有界**（**bounded from above**）であるという. M を**上界**（**upper bound**）と呼ぶ.
- $m \leq a_n$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は**下に有界**（**bounded from below**）であるという. m を**下界**（**lower bound**）と呼ぶ.
- $m \leq a_n \leq M$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は**有界**（**bounded**）であるという.

有界な数列を**有界数列**（**??bounded sequence**）と呼ぶ. □

$\boxed{\textbf{例}}$ **（有界な数列の具体例）** $a_n = (-1)^{n-1}$ は $-1 \leq a_n \leq 1$ を満たすので有界である. □

$\boxed{\textbf{定義}}$ **（単調数列）** 数列 $\{a_n\}$ に対して次の性質を定義する.

- $a_n < a_{n+1}$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は**単調増加**（**monotonic increasing**）であるという.
- $a_n \leq a_{n+1}$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は**広義の単調増加**（**???? monotonic increasing**）であるという.
- $a_n > a_{n+1}$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は**単調減少**（**monotonic decreasing**）であるという.
- $a_n \geq a_{n+1}$ を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ は**広義の単調減少**（**???? monotonic decreasing**）であるという.

単調増加もしくは単調減少な数列を総称して**単調数列**（**monotonic sequence**）と呼ぶ. □

定理 **（有界な単調数列の収束性）**　有界な広義の単調数列は収束する． □

例 **（有界な単調数列の具体例）**　数列

$$a_n = \frac{2n-3}{5n+1} \tag{1.11.1}$$

を考える．

$$a_{n+1} - a_n = \frac{17}{(5n+6)(5n+1)} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_n < a_{n+1} \tag{1.11.2}$$

を満たすので a_n は単調増加である．初項 $a_1 = 1/6$ は下界となる．上界は

$$\frac{2}{5} - a_n = \frac{17}{5(5n+1)} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_n < \frac{2}{5} \tag{1.11.3}$$

により求まる．$-1/6 \leq a_n < 2/5$ となるので a_n は有界である．定理より a_n は収束する．実際，極限を求めると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{5n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-3/n}{5+1/n} = \frac{2-0}{5+0} = \frac{2}{5} \tag{1.11.4}$$

と得られる． □

問　教科書（p.174）問題 7-2. □

§ 1.12 正項級数

$\boxed{\textbf{定義}}$ **（正項級数）** 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ のうち $a_n \geq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たすものを**正項級数**（**positive term series**）と呼ぶ. □

$\boxed{\textbf{定理}}$ **（正項級数の収束定理）** 正項級数 $\sum a_n$ の部分和から得られる数列 $\{S_n\}$ が上に有界なとき, $\sum a_n$ は収束する.

（証明）$S_{n+1} - S_n = a_n \geq 0$ より S_n は広義の単調増加である. 有界な単調数列は収束するので, S_n が上に有界なとき $\sum a_n$ は収束する. 証明終了. □

$\boxed{\textbf{例}}$ **（正項級数の収束定理の具体例）** 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ を考える. 部分和は

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tag{1.12.1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \tag{1.12.2}$$

$$= a(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) \tag{1.12.3}$$

$$= a\frac{1 - r^{n-1}}{1 - r} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \tag{1.12.4}$$

となるので

$$1 - S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_n < 1 \tag{1.12.5}$$

を得る. $\{S_n\}$ は上に有界である. よって定理より級数 $\sum(1/2)^n$ は収束する. 実際, 極限を計算すると前述の例題より $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ である. □

§ 1.13　正項級数の収束性判定法

定理　**（比較判定法）**　　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える．それぞれの級数の有限部分和を

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \tag{1.13.1}$$

とする．$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある正の整数 N に対して

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad (n \geq N) \tag{1.13.2}$$

を満たすとき以下が成り立つ：

(a) T_n が収束するとき，S_n も収束する．

(a) S_n が発散するとき，T_n も発散する．

□

例　**（比較判定法の具体例）**　　数列 $a_n = \dfrac{1}{1+2^n}$, $b_n = \dfrac{1}{2^n}$ を考える．このとき $0 < a_n < b_n$ を満たす．また，級数 $\sum 2^{-n}$ は収束する．よって定理より級数 $\sum 1/(1+2^n)$ もまた収束する．
□

例 **（調和級数）**　級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ を**調和級数（harmonic series）**という．調和級数は発散する．

（証明）調和級数

$$T = \sum_{n}^{\infty} b_n = \sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \tag{1.13.3}$$

の各項を括り直して

$$T = \sum_{n}^{\infty} \tilde{b}_n = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots +\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots +\right) + \cdots \tag{1.13.4}$$

と考える．ここで $\tilde{b}_n$ は

$$\tilde{b}_1 = 1\,, \tag{1.13.5}$$

$$\tilde{b}_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\,, \tag{1.13.6}$$

$$\tilde{b}_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\,, \tag{1.13.7}$$

$$\tilde{b}_4 = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} \tag{1.13.8}$$

であり，

$$\tilde{b}_n = \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1}}_{2^{n-1}} = \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{k} \tag{1.13.9}$$

とおいている．$a_n < \tilde{b}_n$ を満たす a_n をさがす．$\tilde{b}_n$ に関して不等式

$$\tilde{b}_n = \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1}}_{2^{n-1}} \tag{1.13.10}$$

$$> \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \tag{1.13.11}$$

が成り立つので，$a_n = 1/2$ とおけば $a_n < \tilde{b}_n$ を得る．よって比較判定法より

$$0 < a_n < \tilde{b}_n\,, \quad S_n < T_n \qquad \Rightarrow \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty\,, \quad T = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \tag{1.13.12}$$

を得る．以上証明終り．　□

定理 **（ダランベールの判定法）**　正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ は，極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \tag{1.13.13}$$

により，級数の収束性の判定ができる：

(a) $0 \leq L < 1$ のとき，$\sum a_n$ は収束する．

(b) $L > 0$ のとき，$\sum a_n$ は発散する．

(c) $L = 1$ のとき，$\sum a_n$ の収束性は判定できない．

□

例 **（ダランベールの判定法の具体例）**　級数

$$S = 1 + |x| + \frac{|x|^2}{2} + \frac{|x|^3}{3!} + \cdots + \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{1.13.14}$$

を考える．$a_n = \dfrac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} > 0$ であるから，S は正項級数である．よって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!}\frac{(n-1)!}{|x|^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n} = 0 \tag{1.13.15}$$

が成り立つので，ダランベールの判定法より級数は収束する．□

問　教科書（p.180）問題 7-3.　□

§ 1.14 交項級数

定義（**交項級数**） 級数

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n \quad (b_n \geq 0) \tag{1.14.1}$$

を**交項級数（alternative term series）**と呼ぶ. □

定理（**交項級数の収束定理**） 交項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ は次の条件を満たすとき収束する：

(1) $b_n \geq b_{n+1}$.

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n = 0$.

（証明）n が偶数のときの有限部分和

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} (b_{2k-1} - b_{2k}) \tag{1.14.2}$$

はと書ける．条件より $b_{2k-1} - b_{2k} \geq 0$ となるので，$S_{2n} \geq 0$ となる．また $S_2, S_4, \cdots, S_{2n}, \cdots$ は単調増加となる．さらには S_{2n} は

$$S_{2n} = b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} (b_{2k} - b_{2k+1}) - b_{2n} \tag{1.14.3}$$

とも書ける．$b_{2k} - b_{2k+1} \geq 0$, $b_{2k} \geq 0$ であるから，$S_{2n} \leq b_1$ となる．よって S_n は

$$0 \leq S_{2n} \leq b_1 \tag{1.14.4}$$

を満たす．S_{2n} は有界な単調増加数列である．よって S_{2n} は極限 $S = \displaystyle\lim_{n \to \infty} S_{2n}$ が存在する．次に n が奇数にる場合を考える．S_{2n+1} の極限は

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} (S_{2n} + b_{2n+1}) = S + 0 = S \tag{1.14.5}$$

と得られる．以上で証明終了. □

例（**交項級数の収束定理の具体例**） 級数 $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ は収束する．なぜなら $b_n = 1/2^n > b_{n+1} = 1/2^{n+1}$ であり，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ であるから，定理より級数は収束する. □

例（**交項級数の収束定理の具体例**） 級数 $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は収束する．なぜなら $b_n = 1/n > b_{n+1} = 1/(n+1)$ であり，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ であるから，定理より級数は収束する. □

§ 1.15 絶対収束級数

定理（**絶対収束級数の収束定理**） 級数 $\sum |a_n|$ が収束するとき，級数 $\sum a_n$ も収束する．

（証明）有限部分和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \tag{1.15.1}$$

を考える．絶対値の性質より

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = T_n \tag{1.15.2}$$

が成り立つ．これより

$$S_n + T_n = (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \cdots + (a_n + |a_n|) \leq 2T_n \tag{1.15.3}$$

となる．$a_n + |a_n| \geq 0$ より $S_n + T_n$ は正項級数である．正項級数 $2T_n$ が収束するとき $S_n + T_n$ もまた収束する．よって T_n が収束するとき，S_n も収束する． □

定義（**絶対収束級数**） $\sum a_n$ が収束し，かつ $\sum |a_n|$ も収束するとき，$\sum a_n$ は**絶対収束する**（**absolutely convergent**）という．このとき級数 $\sum a_n$ を**絶対収束級数**（**absolutely convergent series**）と呼ぶ． □

定義（**条件収束級数**） $\sum a_n$ は収束するが $\sum |a_n|$ が収束しない場合は，$\sum a_n$ は**条件収束する**（**conditionally convergent**）という．このとき級数 $\sum a_n$ は**条件収束級数**（**conditionally convergent series**）と呼ぶ． □

$\boxed{\text{問}}$ **（絶対収束級数の具体例）**　等比級数の例題で示したように $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ は収束する．交項級数の例題で示したように $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ は収束する．よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ は絶対収束級数である． □

$\boxed{\text{問}}$ **（条件収束級数の具体例）**　交項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は前述の例題で示したように収束する．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は調和級数であり前述の例題のとおり発散する．よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は条件収束級数である． □

$\boxed{\text{問}}$ **（絶対収束級数の収束定理の具体例）**　級数

$$S = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{1.15.4}$$

を考える．このとき

$$S \leq T = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + |x| + \frac{|x|^2}{2} + \frac{|x|^3}{3!} + \cdots + \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \tag{1.15.5}$$

が成り立つ．ダランベールの判定法の例題で示したように，T は収束する．級数 S は級数 T でおさえられているので，S が収束するとき T もまた収束する． □

$\boxed{\text{問}}$　教科書（p.183）問題 7-4. □

2　変数と関数

§ 2.1　関数

関数（function）とは，ある値 x が与えられたとき，何らかの演算規則 f に従って値 y を定め，その値 y を返す機能のことである．関数は

$$y = f(x) \tag{2.1.1}$$

と書き表される．例えばある関数を $f(x) = x^3 - 2x + 5$ と書くことにすると，

$$f(1) = 1^3 - 2 \times 1 + 5 = 4\,x \qquad \to \qquad y = 4 \tag{2.1.2}$$
$$f(0) = 0^3 - 2 \times 0 + 5 = 5 \qquad \to \qquad y = 5 \tag{2.1.3}$$
$$f(-2) = (-2)^3 - 2 \times (-2) + 5 = 1 \qquad \to \qquad y = 1 \tag{2.1.4}$$
$$f(a) = a^3 - 2a + 5 \qquad \to \qquad y = a^3 - 2a + 5 \tag{2.1.5}$$

のように，$f(x)$ の左辺の括弧内の x がある数に書き置き換われば，右辺の x もその数に置き換わる．そしてそれぞれの x に応じて値 y が定まる．

定義　**（関数に関する名称）**　関数に関連して以下の名称を定義する：

- **定数（constant）** $\cdots$ 一定の値を表す数.
- **変数（variable）** $\cdots$ 変化する値を表す数.
- **独立変数（independent variable）** $\cdots$ 自由に値を定めることができる変数 x のこと.
- **従属変数（dependent variable）** $\cdots$ 独立変数 x に応じて値が変化する変数 y のこと.
- **定義域，変域（domain）** $\cdots$ 独立変数 x がとり得る範囲.
- **値域（range）** $\cdots$ 従属変数 y がとり得る範囲.

□

例　**（関数に関する名称の具体例）**　関数 $y = f(x) = ax^2 + b$ を考える．このとき a, b は定数であり，x, y は変数である．また x は独立変数であり，y は従属変数である．定義域は $-\infty < x < \infty$ であり，値域は $b \leq y < \infty$ である．　□

§ 2.2 関数のグラフ

$\boldsymbol{x}$ **軸**と $\boldsymbol{y}$ **軸**を直角に交わるように描き $\boldsymbol{xy}$ **平面** を用意する．変数 x の値を定義域内で変化させ，点 $(x, y) = (x, f(x))$ の軌跡を xy 平面内に描く．これにより関数 $f(x)$ のグラフが得られる．

$\boxed{\textbf{定義}}$ **（一価関数，多価関数）** ある一つの x の値に対する y の値の個数で次のように関数を分類する．

- **一価関数（single valued function）** $\cdots$ ある x に対して y の値がただ一つ定まる関数.
- **多価関数（many valued function）** $\cdots$ ある x に対して y の値が複数定まる関数．y の値の個数が n 個となることが分かっている場合は，$\boldsymbol{n}$ **価関数（$\boldsymbol{n}$-valued function）** と呼ぶ.

□

$\boxed{\textbf{定義}}$ **（逆関数）** $y = f(x)$ を方程式とみなし，x について解いたとき $x = g(y)$ が得られたとする．このとき $g(y)$ を**逆関数（inverse function）**と呼び $g(y) = f^{-1}(y)$ と書く．変数の表し方が本質的でない場合は y と x を取り替えて $f^{-1}(x)$ と書く． □

$\boxed{\textbf{問}}$ **（逆関数のグラフ）** 関数 $y = f(x)$ のグラフとその逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは，直線 $y = x$ に関して線対称である．これを示せ． □

$\boxed{\textbf{定義}}$ **（枝，主枝，主値）** 多価関数が一価関数となるように値域を限定する．このとき得られる一価関数それぞれを**分枝（branch）**と呼ぶ．この分枝のうち代表する一つを**主分枝（principal branch）**と呼ぶ．主分岐は**主値** **(principal value)** ともいう． □

$\boxed{\textbf{例}}$ **（逆関数の具体例）** 関数 $y = f(x) = ax + b$ の逆関数を考える．$y = ax + b$ について解くと，$x = (y - b)/a$ となるので，逆関数は $f^{-1}(y) = (y - b)/a$ となる．y と x を入れ替えると $f^{-1}(x) = (x - b)/a$ である． □

$\boxed{\textbf{例}}$ **（一価関数，多価関数，逆関数，分枝の具体例）** $y = f(x) = x^2$ は一価関数である．この関数の逆関数は $y = f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$ であり 2 価関数となる．値域を $y \geq 0$ と $y \leq 0$ とに限定すると一価関数が二つ得られる．すなわち分枝は $y = \sqrt{x}$ と $y = -\sqrt{x}$ である． □

$\boxed{\textbf{問}}$ 教科書（p.19）問題 2-1. □

定義（単調関数）　x の定義域に含まれる $x_1 < x_2$ を満たす任意の二点 x_1, x_2 に対して，

- $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つとき，関数 $f(x)$ は**単調増加（monotonic increasing）**であると呼ぶ.
- $f(x_1) \leq f(x_2)$ が成り立つとき，関数 $f(x)$ は**広義の単調増加（???? monotonic increasing）**であると呼ぶ.
- $f(x_1) > f(x_2)$ が成り立つとき，関数 $f(x)$ は**単調減少（monotonic decreasing）**であると呼ぶ.
- $f(x_1) \geq f(x_2)$ が成り立つとき，関数 $f(x)$ は**広義の単調減少（???? monotonic decreasing）**であると呼ぶ.

単調増加または単調減少である関数を総称して**単調関数（monotonic function）**と呼ぶ. □

例（単調関数の具体例）　関数 $y = f(x) = ax$ を考える．$a > 0$ のとき $f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ において単調増加である．また $a < 0$ のときは $f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ において単調減少となる．なぜなら $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$ であり，$x_2 - x_1 > 0$ であることより，a の符号により $f(x_2)$ と $f(x_1)$ の大小関係が定まるからである. □

定義（周期関数）　$f(x+T) = f(x)$ を満たす関数を**周期関数（periodic function）**と呼ぶ．T を**周期（period）**と呼ぶ. □

定義（奇関数，偶関数）　$f(-x) = -f(x)$ を満たす関数を**奇関数（odd function）**と呼ぶ．$f(-x) = (x)$ を満たす関数を**偶関数（even function）**と呼ぶ. □

問　奇関数は原点に関して点対称のグラフとなる．偶関数は y 軸に関して線対称なグラフとなる．これを示せ. □

§ 2.3　関数のいろいろ

本講義では**初等関数（elementary function）**の一部のみを取り扱う．初等関数とは，代数関数，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数，およびこれらの関数の有限回の合成から得られる関数のことである（本当のところは初等教育で取り扱う関数のことを初等関数と呼ぶ）．

以下に初等関数のいくつかを列挙する．

§ 2.4　一次関数

一次関数（linear function）は

$$y = a\,x + b \tag{2.4.1}$$

により与えられる関数である．ただし，a, b は定数である．

§ 2.5　巾関数

巾（べき）関数（??power function）は

$$y = a\,x^n \tag{2.5.1}$$

により与えられる関数である．ただし，a は定数であり，n は整数である．n を巾関数の**次数**と呼ぶ．

§ 2.6　多項式関数

多項式関数（polynomial function）は正の次数をもつ巾関数の線形結合で与えられ，

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \tag{2.6.1}$$

と表される．ただし，$a_0, \cdots, a_n$ は定数であり，n は正の整数である．多項式の次数は巾の最大次数を指す．この場合の多項式の次数は n である．

§ 2.7　有理関数

有理関数（rational function）は

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} \tag{2.7.1}$$

により与えられる関数である．ただし，$a_0, \cdots, a_n, b_0, \cdots, b_m$ は定数であり，n, m は正の整数である．

§ 2.8　指数関数

指数関数（exponential function） は

$$y = a^x \tag{2.8.1}$$

により与えられる関数である．ただし，a は定数である．特に $a = e$ の場合が重要である．ここで e は

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828459041\cdots \tag{2.8.2}$$

により定義される定数である．指数関数と単に呼ぶときは $y = e^x$ を指す場合が多い．指数関数の性質として以下のものがあげられる：

(1) $a^x a^y = a^{x+y}$.

(2) $(a^x)^y = a^{xy}$.

(3) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

(4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

問　教科書（p.26）問題 2-2 1.　□

§ 2.9　対数関数

指数関数の逆関数を**対数関数（logarithmic function）**といい，

$$y = \log_a x \qquad (x > 0) \tag{2.9.1}$$

と表される．y は a を底とする対数であると読む．特に $a = 10$ のとき**常用対数**と呼び $y = \log x$ と書く．また $a = e$ のとき**自然対数**と呼び $y = \log x$ または $y = \ln x$ と書く．対数関数の性質として以下のものがあげられる：

(1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

(2) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.

(3) $\log_a x^y = y\log_a x$.

(4) $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

問　この性質を示せ.

（答え）対数関数は指数関数の逆関数であることと指数関数の性質を用いて示す.　□

§ 2.10　三角関数

単位円（半径 1 で中心が原点 O にある円）C と原点 O を通る直線 L を用意する．円 C と直線 L の交点を P とする．点 P より x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を Q とする．点 $(1,0)$ を Q' とし，Q' を通り y 軸に平行な直線と直線 L との交点を P' とする．Q' から点 P への円弧の（方向付き）長さを x とする．このとき，点 P の座標を $(\cos x, \sin x)$ と定義し，点 P' の座標を $(1, \tan x)$ と定義する．この定義により得られる関数を**三角関数（trigonometric function）**と呼ぶ．読み方は $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の順に sine, cosine, tangent である．

三角関数は

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x)\,, \tag{2.10.1}$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x)\,, \tag{2.10.2}$$

$$\tan(x+\pi) = \tan(x) \tag{2.10.3}$$

を満たすので $\sin x$, $\cos x$ は周期 2π の周期関数であり，$\tan x$ は周期 π の周期関数である．また三角関数は

$$\sin(-x) = -\sin(x)\,, \tag{2.10.4}$$

$$\cos(-x) = \cos(x)\,, \tag{2.10.5}$$

$$\tan(-x) = -\tan(x) \tag{2.10.6}$$

を満たすので，$\sin x$, $\tan x$ は奇関数であり，$\cos x$ は偶関数である．さらに三角関数の性質を以下にいくつかあげる．まず $\overline{OP}^2 = 1$ より，

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{2.10.7}$$

が成立する．三角関数はそれぞれ加法公式をもち，

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y\,, \tag{2.10.8}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y\,, \tag{2.10.9}$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \tag{2.10.10}$$

となる．三角関数どうしの互いの関係は，

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\,, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x\,, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x\,, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x} \tag{2.10.11}$$

である．

問　教科書（p.26）問題 2-2 2.-3.　□

問　三角関数の概形を書け．　□

§ 2.11　逆三角関数

三角関数の逆関数を**逆三角関数（inverse trigonometric function）**と呼び，$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数をそれぞれ

$$y = \sin^{-1} x = \arcsin x \qquad (-1 \leq x \leq 1) \tag{2.11.1}$$

$$y = \cos^{-1} x = \arccos x \qquad (-1 \leq x \leq 1) \tag{2.11.2}$$

$$y = \tan^{-1} x = \arctan x \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{2.11.3}$$

と書き表す．読み方は上から arc sine, arc cosine, arc tangent である．逆三角関数は多価関数となる．任意の x に対して無限個の y が存在する．主値をとり一価関数とした逆三角関数を表すには特に

$$y = \mathrm{Arcsin}\, x \qquad (-1 \leq x \leq 1) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.11.4}$$

$$y = \mathrm{Arccos}\, x \qquad (-1 \leq x \leq 1) \qquad (0 \leq y \leq \pi) \tag{2.11.5}$$

$$y = \mathrm{Arctan}\, x \qquad (-\infty < x < \infty) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.11.6}$$

と書く．

問　逆三角関数の概形を書け．　□

§ 2.12　双曲線関数

双曲線関数（hyperbolic function）とは

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{2.12.1}$$

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{2.12.2}$$

$$y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{2.12.3}$$

により定義される関数である．関数の読み方は上から hyperbolic sine, hyperbolic cosine, hyperbolic tangent である．

注意　**（三角関数と双曲線関数）**　三角関数は複素関数を用いて次のようにも定義される．

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{2.12.4}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{2.12.5}$$

$$\tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{2.12.6}$$

双曲線関数の定義との類似に注意せよ． □

問　**（双曲線関数の概形）**　双曲線関数の概形を書け． □

定理　**（双曲線関数の性質）**　双曲線関数は次の性質をもつ．

$$\sinh(-x) = -\sinh(x) \quad \to \text{奇関数} \tag{2.12.7}$$

$$\cosh(-x) = \cosh(x) \quad \to \text{偶関数} \tag{2.12.8}$$

$$\tanh(-x) = -\tanh(x) \quad \to \text{奇関数} \tag{2.12.9}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{2.12.10}$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \tag{2.12.11}$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \tag{2.12.12}$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} \tag{2.12.13}$$

□

問　この性質を証明せよ．

（証明）双曲線関数の定義をそのまま用いれば証明できる． □

問 **（双曲線関数の性質）**　次の式を導け．

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{2.12.14}$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1) \tag{2.12.15}$$

$$\sinh x \cosh x = \frac{1}{2}\sinh 2x \tag{2.12.16}$$

$$\tanh^2 x = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{2.12.17}$$

□

問 **（円と双曲線）**　円 $x^2 + y^2 = 1$ をパラメータ表示すると

$$x(t) = \cos t\,, \quad y(t) = \sin t \tag{2.12.18}$$

と表わせる．双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ をパラメータ表示するには

$$x(t) = \pm\cosh t\,, \quad y(t) = \sinh t \tag{2.12.19}$$

とおけばよい．これを示せ．□

注意　双曲線関数に対して三角関数は円関数と呼ぶこともある．□

§ 2.13 逆双曲線関数

双曲線関数の逆関数は**逆双曲線関数（inverse hyperbolic function）**と呼び，

$$y = \sinh^{-1} x = \operatorname{arcsinh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{2.13.1}$$

$$y = \cosh^{-1} x = \operatorname{arccosh} x = \log\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right) \qquad (1 \leq x) \tag{2.13.2}$$

$$y = \tanh^{-1} x = \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad (|x| < 1) \tag{2.13.3}$$

と表される．読み方は上から hyperbolic arc sine, hyperbolic arc cosine, hyperbolic arc tangent である．$\operatorname{arccosh} x$ は二価関数である．枝は $\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ と $\log\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)$ である．通常は前者を主値にとる．その他の逆双曲線関数は一価関数である．

問　逆双曲線関数の概形を書け． □

問　逆双曲線関数が (2.13.1)–(2.13.3) のように対数関数を用いて書き表されることを示せ．

（答え）$y = \operatorname{arcsinh} x$ とおく．逆に書けば $x = \sinh y = (e^y - e^{-y})/2$ である．これより

$$2x = e^y - e^{-y} \tag{2.13.4}$$

$$2x\, e^y = e^{2y} - 1 \tag{2.13.5}$$

$$e^{2y} - 2x\, e^y - 1 = 0 \tag{2.13.6}$$

$$\left(e^y - x\right)^2 = x^2 + 1 \geq 0 \tag{2.13.7}$$

$$e^y - x = \pm\sqrt{x^2+1} \tag{2.13.8}$$

$$0 \leq e^y = x \pm \sqrt{x^2+1} \tag{2.13.9}$$

$$\text{この条件のもとでは複合の “−” は不適} \tag{2.13.10}$$

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1} \geq 0 \tag{2.13.11}$$

$$y = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \tag{2.13.12}$$

を得る． □

§ 2.14 関数の極限

$\boxed{\textbf{定義}}$ **（右極限，左極限）**　変数 x を右から a に近づけたときの $f(x)$ の値を

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \tag{2.14.1}$$

と書き，**右極限（right-hand limit）**と呼ぶ．同様に，変数 x を左から a に近づけたときの値を

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \tag{2.14.2}$$

と書き，**左極限（left-hand limit）**と呼ぶ．

□

$\boxed{\textbf{定義}}$ **（関数の極限）**　変数 x を a に近づけるとき，その近づけ方に依らず全て同じ極限となるとき，すなわち

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) \tag{2.14.3}$$

が成り立つとき，そのときに限り $x \to a$ における関数 $f(x)$ の極限が存在し，

$$\lim_{x \to a} f(x) \tag{2.14.4}$$

と書く．極限が存在するとき以下のように表現する：

x が a に限りなく近づくとき，
　関数 $f(x)$ には極限が存在し，その極限値は b である．　(2.14.5)

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = b. \tag{2.14.6}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \to b \quad (x \to a). \tag{2.14.7}$$

$\Leftrightarrow f(x)$ は $x \to a$ において b に**収束**する．　(2.14.8)

□

例 **（関数の極限の具体例）**　関数 $f(x) = x^2$ を考える．このとき

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} f(x) = 4 \tag{2.14.9}$$

となる．右からの極限も左からの極限も存在し同じ値となる．よって

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \tag{2.14.10}$$

である．

□

例 **（関数の極限の具体例）**　関数

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \tag{2.14.11}$$

を考える．$x \to +0$ のとき $1/x \to +\infty$ である．$1/x \to +\infty$ であるから $f(x)$ は 1 と -1 の間を振動する．よって右極限 $\lim_{x \to +0} f(x)$ は存在しない．$x \to -0$ のとき $1/x \to -\infty$ である．以下同様で左極限 $\lim_{x \to -0} f(x)$ は存在しない．右極限も左極限も存在しないので，極限 $\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しない．

□

例 **（関数の極限の具体例）**　関数

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (x \neq 0) \tag{2.14.12}$$

を考える．$x > 0$ のとき $f(x) = x/x = 1$ であるから右極限は

$$\lim_{x \to +0} f(x) = 1 \tag{2.14.13}$$

となる．$x < 0$ のとき $f(x) = (-x)/x = -1$ であるから左極限は

$$\lim_{x \to -0} f(x) = -1 \tag{2.14.14}$$

となる．右極限と左極限が一致しないので，極限 $\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しない．

□

定理 **（関数の極限に関する性質）**　関数 $f(x)$, $g(x)$ に関して極限

$$\lim_{x\to a} f(x) = A\,, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = B \tag{2.14.15}$$

が存在するならば，

$$\lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) = \alpha A\,, \tag{2.14.16}$$

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = A + B\,, \tag{2.14.17}$$

$$\lim_{x\to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x) = \alpha A + \beta B\,, \tag{2.14.18}$$

$$\lim_{x\to a} (f(x) g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) \left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = AB\,, \tag{2.14.19}$$

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B} \tag{2.14.20}$$

が成り立つ．ただし，α, β は定数である． □

例 **（関数の極限の計算例）**

$$\lim_{x\to 2} (3x + 5) = 3 \lim_{x\to 2} x + 5 = 11\,. \tag{2.14.21}$$

$$\lim_{x\to 2} (x+7)(x-3) = \lim_{x\to 2} (x+7) \times \lim_{x\to 2} (x-3) = 9 \times (-1) = -9\,. \tag{2.14.22}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} = \frac{\lim_{x\to 2} (x^2 - 1)}{\lim_{x\to 2} (x^2 + 2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,. \tag{2.14.23}$$

□

変数 x の値が正で限りなく大きくなるとき $x \to +\infty$ と書く．変数 x の値が負で限りなく小さくなるとき $x \to -\infty$ と書く．また，変数 $f(x)$ の値が正で限りなく大きくなるとき $f(x) \to +\infty$ と書く．変数 $f(x)$ の値が負で限りなく小さくなるとき $f(x) \to -\infty$ と書く．

例（関数の極限の計算例）

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0\,. \tag{2.14.24}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0\,. \tag{2.14.25}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2}\sin x = 0\,. \tag{2.14.26}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{ax} = 0 \quad (a<0)\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{ax} = \infty \quad (a>0)\,, \tag{2.14.27}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{ax} = \infty \quad (a<0)\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{ax} = 0 \quad (a>0)\,. \tag{2.14.28}$$

$$\lim_{x\to a+0} \frac{1}{x-a} = \infty\,, \qquad \lim_{x\to a-0} \frac{1}{x-a} = -\infty\,, \tag{2.14.29}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a}\text{：存在ない.} \tag{2.14.30}$$

$$\lim_{x\to a\pm0} \frac{1}{(x-a)^2} = \infty\,, \qquad \lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^2} = \infty\,. \tag{2.14.31}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-2/x}{1+1/x} = 1\,. \tag{2.14.32}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2/x}{1+1/x} = \infty\,. \tag{2.14.33}$$

□

公式（ネピア数）

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{2.14.34}$$

□

公式

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{2.14.35}$$

□

問 教科書（p.31）問題 2-3. □

§ 2.15 連続と不連続

定義（関数の連続性） 次の条件を満たすとき，関数 $f(x)$ は点 $x = a$ において**連続（continuous）**であるという．

(1) $f(a)$ が定義されている．

(2) $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在する．
すなわち $\lim_{x \to a+0} f(x)$ と $\lim_{x \to a-0} f(x)$ が存在し，それらの値が等しい．

(3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成立する．
すなわち $f(a) = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x)$ が成立する．

連続ではない場合は**不連続（discontinuous）**であるいう． □

例（連続な点の具体例） $f(x) = x^2$ は $x = 2$ において連続である．なぜなら $f(2) = \lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} f(x) = 4$ が成り立つからである． □

例（不連続な点の具体例） $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ $(x \neq 2)$ は $x = 2$ において不連続である．なぜなら $f(2)$ は定義されていない．さらには $\lim_{x \to 2+0} f(x) \neq \lim_{x \to 2-0} f(x)$ となるからである． □

例 **（不連続点の除去の具体例）** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $(x \neq 0)$ は $x = 0$ において不連続である．なぜなら $f(0)$ が定義されていないからである．しかし $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases} \tag{2.15.1}$$

と定義すると $f(x)$ は $x = 0$ において連続となる．なぜなら $f(0) = \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to -0} f(x) = 1$ が成立するからである．再定義することにより不連続な点 $x = 0$ は取り除かれた． □

例 **（不連続点を除去できない具体例）** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ $(x \neq a)$ は点 $x = a$ において不連続である．点 $x = a$ における値を $f(a) = b$ と定義することにする．うまく b を定めることにより不連続点は取り除くことができるであろうか．$\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a-0} f(x) = -\infty$ であるので，点 $x = a$ の左右で極限がことなる．よってどのように $f(a) = b$ を定めても不連続な点を取り除くことはできない． □

例 **（不連続点の除去の具体例）** $f(x) = \dfrac{x-1}{x-1}$ $(x \neq 1)$ を考える．$f(x)$ は点 $x = 1$ において不連続である．しかし $f(x)$ は分子分母が等しいので， $x \neq 1$ となる点において $f(x) = 1$ である．よって $\lim_{x \to 1 \pm 0} f(x) = 1$ となる．ゆえに点 $x = 1$ の値を $f(1) = 1$ と定義すれば不連続点は取り除かれる．結局，点 $x = 1$ はみかけ上の不連続点であり本質的な不連続点ではない． □

問 教科書（p.36）問題 2-5. □

§ 2.16 連続関数

定義（連続関数）　関数 $f(x)$ が定義内の任意の点において連続であるとき，$f(x)$ は**連続関数（continuous function）**であるという．

□

例（連続関数の具体例）　次の関数は連続関数である．

$$f(x) = x^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{2.16.1}$$

$$f(x) = \log x \quad (x > 0) \tag{2.16.2}$$

$$f(x) = \sin(x) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{2.16.3}$$

$$f(x) = \cos(x) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{2.16.4}$$

$$f(x) = \tan(x) \quad \left(\frac{2n-1}{2}\pi < x < \frac{2n+1}{2}\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right) \tag{2.16.5}$$

□

定義（閉区間における連続関数）　関数 $f(x)$ の定義域が閉区間 $a \leq x \leq b$ のとき，その端点では条件

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)\,, \qquad \lim_{x \to b-0} f(x) = f(b) \tag{2.16.6}$$

を満たすとき連続であるとする．

□

例（閉区間における連続関数の具体例）　$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ $(-2 \leq x \leq 2)$ は連続関数である．なぜなら

$$f(-2) = \lim_{x \to 2+0} f(x) = 0\,, \qquad f(2) = \lim_{x \to 2-0} f(x) = 0 \tag{2.16.7}$$

が成立するからである．

□

定理　**（連続関数に関する性質）**　関数 $f(x)$ と $g(x)$ が連続関数のであるとき，関数

$$f(x)+g(x)\,,\qquad \alpha f(x)+\beta g(x)\,,\qquad f(x)g(x)\,,\qquad \frac{f(x)}{g(x)}\,,\qquad f(g(x)) \tag{2.16.8}$$

もすべて連続関数である．ただし $f(x)/g(x)$ の定義域は $g(x)=0$ とならないものをとることにする．

□

例　**（連続関数に関する性質の具体例）**　巾関数 x^n は連続関数である．よって巾関数の線形結合である多項式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ も連続関数である．

□

例　**（連続関数に関する性質の具体例）**　多項式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ と $b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$ は連続関数である．よってそれらの商である有理関数

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m} \tag{2.16.9}$$

も連続関数である．

□

例　**（連続関数に関する性質の具体例）**　x^2 と $\sin x$ は連続関数である．よってそれらの合成関数である $\sin(x^2)$ も連続関数である．

□

3　微分法

§ 3.1　微分係数

定義　**（微分と微分係数）**　関数 $f(x)$ が $x = a$ において連続で，極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3.1.1}$$

が存在するとき，$f(x)$ は $x = a$ において**微分可能（differentiable）**であるという．このとき有限確定した極限を $f'(a)$ と表記し，$x = a$ における $f(x)$ の**微分係数（differential coefficient）**と呼ぶ．

□

定義　**（右微分係数，左微分係数）**　右極限による関数 $f(x)$ の微分係数を

$$f'(a+0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3.1.2}$$

と書き，**右微分係数（right differential coefficient）**と呼ぶ．左極限による関数 $f(x)$ の微分係数を

$$f'(a-0) = \lim_{h \to -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3.1.3}$$

と書き，**左微分係数（left differential coefficient）**と呼ぶ．

□

注意　**（微分係数の存在）**　$f'(a)$ が存在するとは，すなわち $f'(a+0)$, $f'(a-0)$ が存在し，かつ $f'(a+0) = f'(a-0)$ が成り立つことを意味する．

□

例　**（微分係数の具体例）**　$f(x) = x^2$ の $x = a$ における微分係数を求める．まず

$$g(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3.1.4}$$

とおく．$g(h)$ を計算すると

$$g(h) = \frac{(a+h)^2 - h^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h \tag{3.1.5}$$

を得る．よって

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} g(h) = \lim_{h \to 0} (2a + h) = 2a \tag{3.1.6}$$

により微分係数 $f'(a) = 2a$ が求まる．　□

例　**（微分不可能な点の具体例）**　関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ において連続であるが，微分可能ではない．以下これを示す．まず

$$g(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{|x+h| - |x|}{h} \tag{3.1.7}$$

とおく．$x \geq 0,\ h > 0$ のとき

$$g(x, h) = \frac{|x+h| - |x|}{h} = \frac{x + h - x}{h} = \frac{h}{h} = 1 \tag{3.1.8}$$

である．$x \leq 0,\ h < 0$ のとき

$$g(x, h) = \frac{|x+h| - |x|}{h} = \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \tag{3.1.9}$$

となる．これより

$$f'(+0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to +0} g(0, h) = 1\,, \tag{3.1.10}$$

$$f'(-0) = \lim_{h \to -0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to -0} g(0, h) = -1 \tag{3.1.11}$$

を得る．右微分係数と左微分係数は存在するがその値は異なる．よって $x = 0$ における微分係数 $f'(0)$ は存在しない．$f(x)$ は $x = 0$ において微分不可能である．　□

§ 3.2 導関数

定義 **（導関数）** 関数 $y = f(x)$ が連続関数であり，定義域内の任意の点において微分可能であるとする．このとき関数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3.2.1}$$

が存在する．$f'(x)$ を $f(x)$ の**導関数（derived function, derivative）**と呼ぶ．導関数はまた

$$\frac{d}{dx}y\,, \quad \frac{dy}{dx}\,, \quad y'\,, \quad f'(x)\,, \quad \frac{d}{dx}f(x)\,, \quad \frac{df(x)}{dx} \tag{3.2.2}$$

という表記も用いる． □

例 **（導関数の計算例）** 関数 $f(x) = x^2$ の導関数を求める．まず

$$g(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3.2.3}$$

とおく．$g(x,h)$ を計算すると

$$g(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h \tag{3.2.4}$$

を得る．これより

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} g(x,h) = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x \tag{3.2.5}$$

となる．極限 $f'(x)$ は $-\infty < x < \infty$ の任意の点において有限確定である．よって導関数 $f'(x)$ が存在し $f'(x) = 2x$ が求まる． □

§ 3.3 微分係数と接線

定義（**接線**）　点 (x, y) における微分係数 $f'(x)$ を曲線 $y = f(x)$ の**接線（tangent）**と呼ぶ．
□

点 $P(x, y)$, $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$, $R(x + \Delta x, y)$ からなる三角形を考える．$\angle PRQ = \pi/2$ だからこの三角形は直角三角形である．$\angle QPR$ の角度を θ とおくと

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta \tag{3.3.1}$$

が成り立つ．斜辺 PQ の傾きは $\tan\theta$ である．$\Delta x \to 0$ のときの $\theta(x, \Delta x)$ の極限を考える．まず $\Delta y/\Delta x$ を計算すると

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{3.3.2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{3.3.3}$$

を得る．傾き $\Delta y/\Delta x$ の極限が $f'(x)$ であるので，$\tan\theta(x, \Delta x)$ の極限も $f'(x)$ となる．よって $\Delta x \to 0$ における $\theta(x, \Delta x)$ の極限 $\alpha(x)$ が存在し，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \tan\theta(x, \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \to \quad \tan\alpha(x) = \frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{3.3.4}$$

となる．以上より，点 $P(x, y)$ に接するように極微小な三角形を描いたとき，その斜辺の傾きは $\tan\alpha(x)$ であり，その角度は $\alpha(x) = \arctan f'(x)$ である．

例（**接線の方程式**）　曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ において曲線に接する直線を接線と呼ぶ．**接線の方程式**は

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{3.3.5}$$

で与えられる．この方程式を導出する．点 $(a, f(a))$ に接する極微小な直角三角形を考える．このとき三角形の斜辺の傾きは $\tan\alpha = f'(a)$ である．次に極微小な三角形と相似で点 $(a, f(a))$, $(x, f(x))$ を斜辺とする三角形を考える．この三角形の斜辺の傾き $(y - f(a))/(x - a)$ は相似図形であるから， $\tan\alpha = f'(a)$ となる．よって

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \tan\alpha = f'(a) \tag{3.3.6}$$

が成り立つ．これより接線の方程式を得る．接線の方程式は点 $x = a$ における関数 $f(x)$ の **1 次（線形）近似**ともいう．ちなみに関数 $f(x)$ の $x = a$ における **0 次近似**は $y = f(a)$ である．
□

問　教科書（p.46）問題 3-2.
□

§ 3.4 導関数の計算

定理　**（微分演算に関する性質）**　関数 $f = f(x)$, $g = g(x)$ が微分可能なとき，次の関係が成り立つ：

(1) **（和の微分）** $(f+g)' = f' + g'$.

(2) **（微分の線形性）** $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$　(α, β：定数).

(3) **（積の微分）** $(fg)' = f'g + fg'$.

(4) **（商の微分）** $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{f^2}$　$(g(x) \neq 0)$.

(5) **（合成関数の微分）** $y = f(g(x))$ のとき $y = f(z)$, $z = g(x)$ とおけば

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = f'(z)\frac{dz}{dx} = f'(g(x))g'(x)\,. \tag{3.4.1}$$

この演算規則を**チェインルール（chain rule）**と呼ぶ.

(6) **（逆関数の微分）** $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ のとき

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}\,, \qquad \frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,. \tag{3.4.2}$$

□

例　**（導関数の計算例）**　以下の関数の導関数を求めよ.

$$y = (x^2-1)(x^3+2) \tag{3.4.3}$$

$$y = \frac{x-2}{x^2+x+2} \tag{3.4.4}$$

$$y = (3x^2-x-1)^4 \tag{3.4.5}$$

$$y = \sin^3 4x \tag{3.4.6}$$

□

$\boxed{\textbf{問}}$ 微分演算に関する性質を示せ．

（証明）(1) $F(x) = f(x) + g(x)$ とおく．定義に従い計算すると

$$
\begin{aligned}
(f+g)' &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x) \qquad (3.4.7)
\end{aligned}
$$

を得る．

(2) $F(x) = \alpha\, f(x) + \beta\, g(x)$ とおく．定義に従い計算すると

$$
\begin{aligned}
(f+g)' &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha\, f(x+h) + \beta\, g(x+h) - \alpha\, f(x) - \beta\, g(x)}{h} \\
&= \alpha \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \beta \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x) \qquad (3.4.8)
\end{aligned}
$$

を得る．

(3) $F(x) = f(x)g(x)$ とおく．定義に従い計算すると

$$
\begin{aligned}
(fg)' &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \times \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \qquad (3.4.9) \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad (3.4.10)
\end{aligned}
$$

を得る．

(4) $F(x) = f(x)/g(x)$ とおく．定義に従い計算すると，

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)/g(x+h) - f(x)/g(x)}{h} \qquad (3.4.11) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\, g(x+h)g(x)} \qquad (3.4.12) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x) - f(x)(g(x+h) - g(x))}{h\, g(x+h)g(x)} \qquad (3.4.13) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \qquad (3.4.14) \\
&= \frac{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)g(x)} \qquad (3.4.15) \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \qquad (3.4.16)
\end{aligned}
$$

を得る．

(5) $F(x) = f(g(x))$ とおく．定義に従い計算すると

$$\begin{aligned}(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x)+g(x+h)-g(x))-f(g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x)+g(x+h)-g(x))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

を得る．ここで $\tilde{h} = g(x+h)-g(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned}(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g+\tilde{h})-f(g)}{\tilde{h}}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g+\tilde{h})-f(g)}{\tilde{h}} \times \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\end{aligned} \tag{3.4.18}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\tilde{h} &= \lim_{h\to 0}(g(x+h)-g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\times h\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\times\lim_{h\to 0}h\\ &= g'(x)\times 0 = 0\end{aligned} \tag{3.4.19}$$

が成り立つ．よって $h\to 0$ のとき $\tilde{h}\to 0$ である．以上より

$$(f(g(x)))' = \lim_{\tilde{h}\to 0}\frac{f(g+\tilde{h})-f(g)}{\tilde{h}} \times \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(g(x))g'(x)\,. \tag{3.4.20}$$

を得る．

(6) $y = f(x),\, x = f^{-1}(y)$ より

$$y = f(x) = f(f^{-1}(y)) \tag{3.4.21}$$

となる．$y = f(f^{-1}(y))$ の両辺は y に関する関数である．両辺を y で微分すると

$$\frac{d}{dy}y = f'(f^{-1}(y))\frac{df^{-1}(y)}{dy} \tag{3.4.22}$$

$$1 = f'(x)\frac{dx}{dy} \tag{3.4.23}$$

$$1 = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy} \tag{3.4.24}$$

を得る．よって

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dx}f^{-1}(y) = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \tag{3.4.25}$$

となる．

□

§ 3.5　定数の微分

定理　**（定数の微分）**

$$\frac{d}{dx}c = 0 \qquad (c：定数) \tag{3.5.1}$$

□

問　これを示せ.

（証明）$y = f(x) = c$ とおき定義に従い計算すると,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0 \tag{3.5.2}$$

を得る.

□

§ 3.6　巾関数の微分

定理　**（巾関数の微分）**

$$\frac{d}{dx}\,x^n = n\,x^{n-1} \quad (n：自然数) \tag{3.6.1}$$

□

問　これを示せ．

（証明）$y = f(x) = x^n$ とおき定義に従い計算すると，

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \tag{3.6.2}$$

を得る．ここで

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,x^{n-k}h^k \tag{3.6.3}$$

$$= x^n + n\,x^{n-1}h + \frac{1}{2}n(n-1)\,x^{n-2}h^2 + \cdots + n\,xh^{n-1} + h^n \tag{3.6.4}$$

$$= x^n + n\,x^{n-1}h + h^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\,x^{n-k}h^{k-2} \tag{3.6.5}$$

であることを用いると

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n\,x^{n-1} + h\left\{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\,x^{n-k}h^{k-2}\right\} \tag{3.6.6}$$

となる．$h\to 0$ のとき $n\,x^{n-1}$ の項は生き残り，その後ろの項は消える．よって

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = n\,x^{n-1} \tag{3.6.7}$$

を得る．

□

定理 （負巾関数の微分）

$$\frac{d}{dx}\,\frac{1}{x^n} = \frac{d}{dx}\,x^{-n} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -n\,x^{-n-1} \quad (n\text{：自然数}) \tag{3.6.8}$$

□

問 これを示せ.

（証明）$y = f(x) = 1/x^n$ とおく．このとき

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n} = \frac{x^n - (x+h)^n}{(x+h)^n\,x^n} \tag{3.6.9}$$

$$= \frac{x^n - x^n - n\,x^{n-1}h - h^2 \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\, x^{n-h}h^{k-2}}{(x+h)^n\,x^n} \tag{3.6.10}$$

$$= -h\frac{n\,x^{n-1} + h \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\, x^{n-k}h^{k-2}}{(x+h)^n\,x^n} \tag{3.6.11}$$

となる．これを用いて

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3.6.12}$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{n\,x^{n-1} + h \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\, x^{n-k}h^{k-2}}{(x+h)^n\,x^n} = -\frac{n\,x^{n-1} + 0}{(x+0)^n\,x^n} = \frac{-n}{x^{n+1}} \tag{3.6.13}$$

を得る． □

$\boxed{\textbf{定理}}$ **（m 乗根関数の微分）**

$$\frac{d}{dx}\sqrt[m]{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{m}} = \frac{\sqrt[m]{x}}{m\,x} = \frac{1}{m}\,x^{\frac{1}{m}-1} \quad (m\text{：自然数}) \tag{3.6.14}$$

□

$\boxed{\textbf{問}}$ これを示せ．

（証明）$y = f(x) = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$ とおく．このとき

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^{\frac{1}{m}} - x^{\frac{1}{m}} \tag{3.6.15}$$

である．ここで

$$a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1}) \tag{3.6.16}$$

$$= (a-b)\sum_{k=1}^{m} a^{m-k}b^{k-1} \tag{3.6.17}$$

$$\Rightarrow \quad a - b = \frac{a^m - b^m}{\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a^{m-k}b^{k-1}} \tag{3.6.18}$$

であることを用いる．$a = (x+h)^{\frac{1}{m}}$, $b = x^{\frac{1}{m}}$ とおくと

$$f(x+h) - f(x) = \frac{\left((x+h)^{\frac{1}{m}}\right)^m - \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^m}{\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(x+h)^{\frac{m-k}{m}}x^{\frac{k-1}{m}}} = \frac{(x+h) - x}{\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left((x+h)^{m-k}x^{k-1}\right)^{\frac{1}{m}}} \tag{3.6.19}$$

$$= \frac{h}{\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left((x+h)^{m-k}x^{k-1}\right)^{\frac{1}{m}}} \tag{3.6.20}$$

を得る．よって

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left((x+h)^{m-k}x^{k-1}\right)^{\frac{1}{m}}} \tag{3.6.21}$$

$$= \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left((x+0)^{m-k}x^{k-1}\right)^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{m}x^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{1}{m\,x^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{1}{m}\,x^{\frac{1}{m}-1} \tag{3.6.22}$$

となる．

□

定理 （巾関数の微分）

$$\frac{d}{dx}\,x^{\alpha} = \alpha\,x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \tag{3.6.23}$$

□

§ 3.7　対数関数の微分

定理　**（対数関数の微分）**

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} \tag{3.7.1}$$

□

問　これを示せ．

（証明）$y = f(x) = \log x$ とおき定義に従い計算すると，

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log(x)}{h} \tag{3.7.2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\log(x+h)-\log(x)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0}\log\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \tag{3.7.3}$$

$$= \lim_{h\to 0}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0}\log\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}\frac{1}{x}} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}} \tag{3.7.4}$$

$$= \frac{1}{x}\log\left\{\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right\} = \frac{1}{x}\log\left\{\lim_{z=\frac{x}{h}\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right\} \tag{3.7.5}$$

$$= \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x} \tag{3.7.6}$$

を得る．

□

§ 3.8　指数関数の微分

定理　**（指数関数の微分）**

$$\frac{d}{dx}\,a^x = (\log a)\,a^x \tag{3.8.1}$$
$$\frac{d}{dx}\,e^x = e^x \tag{3.8.2}$$

□

関数 e^x は微分演算 $\dfrac{d}{dx}$ に関して恒等的である.

問　これを示せ.

（証明）$y = f(x) = a^x$ とおく．このとき逆関数とその微分は

$$x = f^{-1}(y) = \log_a y = \frac{\log y}{\log a}\,, \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{1}{y}}{\log a} = \frac{1}{(\log a)y} \tag{3.8.3}$$

である．これと逆関数の微分公式より

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{(\log a)y}} = (\log a)y = (\log a)a^x \tag{3.8.4}$$

を得る.

□

§ 3.9 三角関数の微分

定理 **（三角関数の微分）**

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \tag{3.9.1}$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \tag{3.9.2}$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{3.9.3}$$

□

問 これを示せ.

（証明）$y = f(x) = \sin x$ とおく．定義に従い計算すると，

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \tag{3.9.4}$$

を得る．ここで

$$\sin(x+h) - \sin(x) = \sin\left(x + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right) \tag{3.9.5}$$

$$= \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) \tag{3.9.6}$$

$$- \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) \tag{3.9.7}$$

$$= 2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) \tag{3.9.8}$$

であることを用いると

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2} \tag{3.9.9}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \times \lim_{\frac{h}{2} \to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \cos(x) \times 1 = \cos(x) \tag{3.9.10}$$

を得る．

次に $y=f(x)=\cos x$ とおく．定義に従い計算すると，

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} \tag{3.9.11}$$

を得る．ここで

$$\begin{aligned}
\cos(x+h)-\cos(x) &= \cos\left(x+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(x+\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\right) && (3.9.12)\\
&= \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) && (3.9.13)\\
&\quad -\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) && (3.9.14)\\
&= -2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) && (3.9.15)
\end{aligned}$$

であることを用いると

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}=-\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2} && (3.9.16)\\
&= -\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\times\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=-\sin(x)\times 1=-\sin(x) && (3.9.17)
\end{aligned}$$

を得る．

最後に $y=f(x)=\tan(x)$ を考える．このとき

$$y=f(x)=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{3.9.18}$$

であるから商の微分公式より

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(\sin(x))'\cos(x)-\sin(x)(\cos(x))'}{\cos^2(x)}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} && (3.9.19)\\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} && (3.9.20)
\end{aligned}$$

を得る． □

§ 3.10　逆三角関数の微分

定理　**（逆三角関数の微分）**

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.10.1}$$

$$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.10.2}$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \tag{3.10.3}$$

□

問　これを示せ．

（証明）$y = f(x) = \arcsin(x)$ とおく．主値を考えているので値域は

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \tag{3.10.4}$$

である．このとき $f(x)$ の逆関数とその微分は

$$x = f^{-1}(y) = \sin(y)\,, \qquad \frac{dx}{dy} = (\sin(y))' = \cos(y) \tag{3.10.5}$$

である．ここで $\cos(y)$ を x の関数で表すことを考える．$\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$ と $x = \sin(y)$ より

$$\cos(y) = \pm\sqrt{1-\sin^2(y)} = \pm\sqrt{1-x^2} \tag{3.10.6}$$

となる．符号を片方のみ採用する．$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ より $\cos y \geq 0$ となるので，上式の右辺も 0 以上でなければならない．よって

$$\cos y = \sqrt{1-x^2} \tag{3.10.7}$$

である．以上より

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.10.8}$$

を得る．

次に $y = f(x) = \arccos(x)$ $(0 \le y \le \pi)$ とおく．この逆関数とその微分は

$$x = f^{-1}(y) = \cos(y)\,, \qquad \frac{dx}{dy} = -\sin(y) \tag{3.10.9}$$

である．主値 $0 \le y \le \pi$ に注意して $\sin(y)$ を x の関数で表わすと

$$\sin(y) = \sqrt{1-\cos(y)} = \sqrt{1-x^2} \tag{3.10.10}$$

である．ここで $\sin(y) \ge 0$ $(0 \le y \le \pi)$ を用いた．以上より

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin(y)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.10.11}$$

を得る．

最後に $y = f(x) = \arctan(x)$ を考える．この逆関数とその微分は

$$x = f^{-1}(y) = \tan y\,, \tag{3.10.12}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2 \tag{3.10.13}$$

となる．これより

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2} \tag{3.10.14}$$

を得る．

□

§ 3.11 双曲線関数の微分

定理 （双曲線関数の微分）

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x \tag{3.11.1}$$
$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \tag{3.11.2}$$
$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{3.11.3}$$

□

問 これを示せ.

$y = f(x) = \sinh(x)$ とおく．このとき

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{d}{dx}\sinh(x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}e^x - \frac{d}{dx}e^{-x}\right) \tag{3.11.4}$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh(x) \tag{3.11.5}$$

を得る．次に $y = f(x) = \cosh(x)$ とおく．このとき

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{d}{dx}\cosh(x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}e^x + \frac{d}{dx}e^{-x}\right) \tag{3.11.6}$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh(x) \tag{3.11.7}$$

を得る．最後に $y = f(x) = \tanh(x)$ とおく．このとき

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right) = \frac{(\sinh x)'\cosh x - \sinh x(\cosh x)'}{\cosh^2 x} \tag{3.11.8}$$
$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{3.11.9}$$

を得る.

□

§ 3.12 逆双曲線関数の微分

定理 **（逆双曲線関数の微分）**

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \tag{3.12.1}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \tag{3.12.2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2} \tag{3.12.3}$$

□

問　これを示せ．

$y = f(x) = \operatorname{arcsinh}(x)$ とおく．このとき逆関数とその微分は

$$x = f^{-1}(y) = \sinh(y)\,, \qquad \frac{dx}{dy} = \cosh(y) \tag{3.12.4}$$

である．ここで $\cosh(y)$ を x の関数で表わす．$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ より

$$\cosh y = \pm\sqrt{1+\sinh^2 y} = \pm\sqrt{1+x^2} \tag{3.12.5}$$

である．$e^{\pm y} \geq 0$ であり $\cosh y = (e^y + e^{-y})/2 \geq 1$ となることに考慮すると，複合は正のみが採用される．よって $\cosh y = \sqrt{1+x^2}$ となる．以上より

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{3.12.6}$$

を得る．

次に $y = f(x) = \operatorname{arccosh} x$ $(y \geq 0)$ とおく．このとき逆関数とその微分は

$$x = f^{-1}(y) = \cosh y\,, \qquad \frac{dx}{dy} = \sinh y \tag{3.12.7}$$

となる．ここで $\sinh(y)$ を x の関数で表わす．$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ より

$$\sinh y = \pm\sqrt{\cosh^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2-1} \tag{3.12.8}$$

である．$y \geq 0$ のとき $\sinh y \geq 0$ であるから複合は正を採用する．よって $\sinh y = \sqrt{x^2-1}$ となる．以上より

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \tag{3.12.9}$$

を得る．

最後に $y = \operatorname{arctanh} x$ とおく．この逆関数とその微分は

$$x = f^{-1}(y) = \tanh y\,, \tag{3.12.10}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cosh^2 y} = \frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y}{\cosh^2 y} = 1 - \left(\frac{\sinh y}{\cosh y}\right)^2 = 1 - \tanh^2 y = 1 - x^2 \tag{3.12.11}$$

となる．よって

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1-x^2} \tag{3.12.12}$$

を得る． $\square$

§ 3.13　高階導関数

定義　**（高階導関数）**　関数 $f'(x)$ が微分可能のとき，$f'(x)$ の導関数

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \tag{3.13.1}$$

を **2 階導関数（second order derivative）** という．このとき $f(x)$ は **2 回微分可能（two times differentiable）** と呼ぶ．同様に $f(x)$ を n 回繰り返し微分した関数を **n 階導関数（n-th order derivative）** といい，$f^{(n)}(x)$ と書き表わす．関数 $f^{(n)}(x)$ は

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{3.13.2}$$

と再帰的に定義する．ただし $f^{(0)}(x) = f(x)$ とする．$f^{(n)}(x)$ が存在するとき $f(x)$ は **n 回微分可能（n times differentiable）** という．

□

例　**（高階導関数の計算例）**　$y = x^\alpha$ の高階導関数を求める．α が自然数ではないとき，

$$\begin{aligned}
y' &= \alpha\, x^{\alpha-1}\,, && (3.13.3)\\
y'' &= \alpha(\alpha-1)\, x^{\alpha-2}\,, && (3.13.4)\\
y''' &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\, x^{\alpha-3}\,, && (3.13.5)\\
&\cdots\\
y^{(n)} &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\,, && (3.13.6)\\
y^{(n+1)} &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)x^{\alpha-n-1} && (3.13.7)\\
&\cdots
\end{aligned}$$

を得る．α が自然数 $\alpha = n$ のとき，

$$\begin{aligned}
y &= x^\alpha\,, && (3.13.8)\\
y' &= \alpha\, x^{\alpha-1}\,, && (3.13.9)\\
y'' &= \alpha(\alpha-1)\, x^{\alpha-2}\,, && (3.13.10)\\
y''' &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\, x^{\alpha-3}\,, && (3.13.11)\\
&\cdots\\
y^{(\alpha-1)} &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots 2\cdot x\,, && (3.13.12)\\
y^{(\alpha)} &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots 2\cdot 1\,, && (3.13.13)\\
y^{(\alpha+1)} &= 0\,, && (3.13.14)\\
y^{(\alpha+2)} &= 0 && (3.13.15)\\
&\cdots
\end{aligned}$$

を得る．

□

例 **（高階導関数の計算例）** $y = e^{a\,x}$ の高階導関数を求める．合成関数の微分を繰り返して

$$
\begin{aligned}
y &= e^{a\,x}\,, && (3.13.16)\\
y' &= a\,e^{a\,x}\,, && (3.13.17)\\
y'' &= a^2\,e^{a\,x}\,, && (3.13.18)\\
y''' &= a^3\,e^{a\,x}\,, && (3.13.19)\\
&\cdots \\
y^{(n)} &= a^n\,e^{a\,x} && (3.13.20)
\end{aligned}
$$

を得る．

□

例 **（高階導関数の計算例）**

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{1-x}\,, && (3.13.21)\\
y' &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,, && (3.13.22)\\
y'' &= -\frac{1}{2\cdot 2}\frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}\,, && (3.13.23)\\
y''' &= -\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2}\frac{1}{\sqrt{(1-x)^5}}\,, && (3.13.24)\\
y^{(4)} &= -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}\frac{1}{\sqrt{(1-x)^7}}\,, && (3.13.25)\\
&\vdots && (3.13.26)\\
y^{(n)} &= -\frac{(2n-3)!!}{2^n}\frac{1}{\sqrt{(1-x)^{2n-1}}} && (3.13.27)
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
(2n+1)!! &= (2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1\,, && (3.13.28)\\
(2n)!! &= (2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2\,, && (3.13.29)\\
0!! &= (-1)!! = 1 && (3.13.30)
\end{aligned}
$$

と定義する．

□

問 教科書（p.52）問題 3-3.

□

§ 3.14 ちょっとまとめ

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n)}(x)$
c (定数)	0	0	0	0
x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$	$\dfrac{\alpha!}{(\alpha-n)!}x^{\alpha-n} \quad (n \leq \alpha \in \mathbb{N})$ $0 \quad (n < \alpha \in \mathbb{N})$ $\dfrac{\alpha!}{(\alpha-n)!}x^{\alpha-n} \quad (\alpha \notin \mathbb{N})$
$\log x$	$\dfrac{1}{x}$			
$\log_a x$	$\dfrac{1}{(\log a)\,x}$			
e^x	e^x	e^x	e^x	e^x
a^x	$(\log a)\,a^x$	$(\log a)^2\,a^x$	$(\log a)^3\,a^x$	$(\log a)^n\,a^x$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$			
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$			
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$			
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$			
$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\sinh x$	
$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$			
$\mathrm{arcsinh}\, x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$			
$\mathrm{arccosh}\, x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$			
$\mathrm{arctanh}\, x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$			

問　上の表の空いている個所を埋めよ.　□

4　テイラー級数

§ 4.1　巾級数

定義　**（巾級数）**　定数 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ と変数 x を考える．このとき級数

$$c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + \cdots + c_n\, x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n \tag{4.1.1}$$

を**巾級数（power series）**と呼ぶ．同様に級数

$$c_0 + c_1\,(x-a) + c_2\,(x-a)^2 + \cdots + c_n\,(x-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n \tag{4.1.2}$$

を $x-a$ の巾級数と呼ぶ．

□

定義　**（収束半径）**　巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n$ は $|x-a| < r$ のとき収束し，$|x-a| > r$ のとき発散する．定数 $r > 0$ を**収束半径（radius of convergence）**と呼ぶ．

□

例　**（収束半径の具体例）**　巾級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \tag{4.1.3}$$

は $|x| < 1$ のとき収束する（公比が x の等比級数であるから）．よって収束半径は $r = 1$ である．

　巾級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{4.1.4}$$

は任意の有限の実数 x に対して収束する（前述の例題参照）．すなわち $|x| < \infty$ において収束する．このとき収束半径は $r = \infty$ と表わす．

□

定理 **（収束半径の計算法）**　巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ を考える．極限

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \tag{4.1.5}$$

が存在するとき，巾級数 $\sum c_n(x-a)^n$ の収束半径は r である．

（証明）級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ とその絶対級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (x-a)^n|$ を考える．このとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n (x-a)^n| \tag{4.1.6}$$

であるので，$\sum |c_n(x-a)^n|$ が収束するとき $\sum c_n(x-a)^n$ も収束する．$\sum a_n = \sum |c_n(x-a)^n|$ とおくと，$a_n = |c_n(x-a)|^n \geq 0$ であるから $\sum a_n$ は正項級数となる．ゆえにダランベールの収束判定法より，級数 $\sum a_n$ は

$$\lim_{n\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \tag{4.1.7}$$

のとき収束する．よって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}(x-a)^{n+1}|}{|c_n(x-a)^n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \frac{|x-a|^{n+1}}{|x-a|^n} \tag{4.1.8}$$

$$= |x-a| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1 \tag{4.1.9}$$

となる．これより

$$|x-a| < \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \tag{4.1.10}$$

を得る．以上より収束半径は

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \tag{4.1.11}$$

と求まる． □

例 **（収束半径の計算例）**　巾級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \tag{4.1.12}$$

の収束半径を求める．$c_n = 1$ であるから，収束半径は

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1 \tag{4.1.13}$$

と求まる．巾級数 $\sum x^n$ は $|x| < r = 1$ のとき収束し，$|x| > r = 1$ のとき発散する．
　巾級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{4.1.14}$$

の収束半径を求める．$c_n = 1/n!$ であるから，収束半径は

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty \tag{4.1.15}$$

と求まる．収束半径は $r = \infty$ である．巾級数 $\sum x^n/n!$ は任意の実数 x に対して収束する．
　巾級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \cdots \tag{4.1.16}$$

の収束半径を求める．$c_n = (-1)^{n-1}/n$ であるから，収束半径は

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{n+1}{(-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1 \tag{4.1.17}$$

と求まる．巾級数 $\sum(-1)^{n-1}x^n/n$ は $|x| < r = 1$ のとき収束し，$|x| > r = 1$ のとき発散する．
□

問　教科書（p.191）問題 7-5 1.　□

§ 4.2 テイラー級数

巾級数 $\sum c_n\,(x-a)^n$ は x についての関数である．これを

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n \qquad (|x-a|<r) \tag{4.2.1}$$

$$=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n+\cdots \tag{4.2.2}$$

とおく．数列 $\{c_n\}$ が一つ与えられると関数 $f(x)$ が一つ定まる．すなわち

$$\text{数列：}\{c_n\} \quad \to \quad \text{関数：}f(x) \quad (|x-a|<r) \tag{4.2.3}$$

との対応関係がある．それでは関数 $f(x)$ が一つ与えられたとき，巾級数 $\sum c_n(x-a)^n$ の係数である $\{c_n\}$ はどのような値に定まるであろうか．すなわち，問題として対応関係

$$\text{関数：}f(x) \quad \to \quad \text{数列：}\{c_n\}=? \tag{4.2.4}$$

を考える．

定理（テイラー級数）　関数 $f(x)$ が ∞ 回微分可能なとき，

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+ \tag{4.2.5}$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \tag{4.2.6}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n \qquad (|x-a|<r) \tag{4.2.7}$$

が成り立つ．ただし点 $x=a$ は定義内のある点とする．この巾級数を関数 $f(x)$ に関する $x=a$ まわりの**テイラー級数（Taylor series）**と呼ぶ．特に $a=0$ のときは，**マクローリン級数（Maclaurin series）**と呼ぶ．

□

注意（テイラー級数の収束半径）　テイラー級数は巾級数 $\sum c_n(x-a)^n$ を

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{4.2.8}$$

とおいたものである．よってテイラー級数の収束半径は

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\frac{(n+1)!}{f^{(n+1)}(a)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(n+1)\frac{f^{(n)}(a)}{f^{(n+1)}(a)}\right| \tag{4.2.9}$$

により求まる．

□

例（テイラー級数の具体例） 基本的な関数のテイラー級数を次に列挙する．

(1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (|x| < \infty)$

(2) $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \qquad (|x| < \infty)$

(3) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n} x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad (|x| < \infty)$

(4) $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n}}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{n}}{n} + \cdots \qquad (|x| < 1)$

(5) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \qquad (|x| < 1)$

(6) α を自然数以外の実数とする．

$$
\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \\
&= 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots \qquad (|x| < 1)
\end{aligned}
$$

α を自然数とする．

$$
\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n \\
&= 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^{\alpha-2} + \alpha\, x^{\alpha-1} + x^\alpha \qquad (|x| < \infty)
\end{aligned}
$$

□

問 これを示せ．収束半径も求めよ．

（答え）(1) $f(x) = e^x$ とおく．導関数を計算すると

$$f(x) = e^x\,, \quad f'(x) = e^x\,, \quad f''(x) = e^x\,, \quad f'''(x) = e^x\,, \quad \cdots \quad f^{(n)}(x) = e^x \tag{4.2.10}$$

となる．点 $x = 0$ における微分係数は

$$f(0) = 1\,, \quad f'(0) = 1\,, \quad f''(0) = 1\,, \quad f'''(0) = 1\,, \quad \cdots \quad f^{(n)}(0) = 1 \tag{4.2.11}$$

である．よってテーラー級数は

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{4.2.12}$$

と求まる．巾級数 $\sum c_n (x-a)^n$ の収束半径 r を求める．係数は

$$c_n = \frac{1}{n!} \tag{4.2.13}$$

であるから，収束半径として

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty \tag{4.2.14}$$

を得る．

(2) $f(x) = \sin x$ とおく．導関数を計算すると

$$f(x) = \sin x\,, \quad f'(x) = \cos x\,, \quad f''(x) = -\sin x\,, \quad f'''(x) = -\cos x\,, \quad f^{(4)}(x) = \sin x\,, \quad \cdots \tag{4.2.15}$$

である．一般的に書くと

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & (n = 4k) \\ \cos x & (n = 4k+1) \\ -\sin x & (n = 4k+2) \\ -\cos x & (n = 4k+3) \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots) \tag{4.2.16}$$

である．点 $x = 0$ における微分係数は

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n = 4k) \\ 1 & (n = 4k+1) \\ 0 & (n = 4k+2) \\ -1 & (n = 4k+3) \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots) \tag{4.2.17}$$

と求まる．これを用いてテーラー級数を求めると

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{4.2.18}$$

$$(n = 4k, n = 4k+1, n = 4k+2, n = 4k+3; k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{4.2.19}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(4k)}(0)}{(4k)!} x^{4k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(4k+1)}(0)}{(4k+1)!} x^{4k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(4k+2)}(0)}{(4k+2)!} x^{4k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(4k+3)}(0)}{(4k+3)!} x^{4k+3} \tag{4.2.20}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)!} x^{4k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{(4k+3)!} x^{4k+3} \tag{4.2.21}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2(2k)+1)!} x^{2(2k)+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{(2(2k+1)+1)!} x^{2(2k+1)+1} \tag{4.2.22}$$

$$(l = 2k, l = 2k+1; k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{4.2.23}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1} \tag{4.2.24}$$

$$(l = n-1; n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{4.2.25}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \tag{4.2.26}$$

を得る．収束半径を求める．

$$c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \tag{4.2.27}$$

とおくと

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \frac{(2n+1)!}{(-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} \tag{4.2.28}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2n+1)(2n) = \lim_{n\to\infty} (4n^2 + 2n) = \infty \tag{4.2.29}$$

が得られる．

(4) $f(x) = \log(1+x)$ とおく．導関数を計算すると

$$f(x) = \log(1+x)\,, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}\,, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\,, \quad f'''(x) = \frac{(-1)(-2)}{(1+x)^3}\,, \quad \cdots \tag{4.2.30}$$

となる．一般的には $n \geq 1$ に対して

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-n+1)}{(1+x)^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \tag{4.2.31}$$

と表わされる．点 $x = 0$ における微分係数は

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \tag{4.2.32}$$

となる．よってテーラー級数は

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{4.2.33}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \tag{4.2.34}$$

と得られる．収束半径 r を求める．

$$c_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n} \tag{4.2.35}$$

とおくと，

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{n+1}{(-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1 \tag{4.2.36}$$

と得られる．

(5) $f(x)=1/(1-x)$ とおく．導関数を計算すると

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\,,\quad f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\,,\quad f''(x)=\frac{2\cdot 1}{(1-x)^3}\,,\quad f'''(x)=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{(1-x)^4}\,,\quad \cdots \tag{4.2.37}$$

である．一般的には

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\,,\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{4.2.38}$$

と表わされる．点 $x=0$ における微分係数は

$$f^{(n)}(0)=n!\,,\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{4.2.39}$$

と得られる．よってテーラー級数は

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \tag{4.2.40}$$

となる．収束半径 r は $c_n=1$ とおくと

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=1 \tag{4.2.41}$$

と得られる．

(6) $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ とおく．導関数を計算すると

$$f(x)=(1+x)^{\alpha}\,,\quad f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}\,,\quad f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}\,, \tag{4.2.42}$$

$$f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}\,,\quad \cdots \tag{4.2.43}$$

である．α が自然数の場合と，それ以外の場合に分けて考える．まず α が自然数以外の実数のときを考える．導関数は

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \tag{4.2.44}$$
$$= \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!}(1+x)^{\alpha-n} \tag{4.2.45}$$

と表わされる．点 $x=0$ における微分係数は

$$f^{(n)}(0) = \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!} \tag{4.2.46}$$

となる．よってテーラー級数は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \tag{4.2.47}$$

と求まる．収束半径 r は

$$c_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!n!} \tag{4.2.48}$$

とおくと，

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha!}{(\alpha-n)!n!}\frac{(\alpha-n-1)!(n+1)!}{\alpha!}\right| \tag{4.2.49}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+1/n}{\alpha/n-1}\right| = 1 \tag{4.2.50}$$

と得られる．次に α が自然数のときを考える．導関数は

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha!}{(\alpha-n)!}(1+x)^{\alpha-n} & (n \leq \alpha) \\ 0 & (n > \alpha) \end{cases} \tag{4.2.51}$$

と表わされる．点 $x=0$ における微分係数は

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} \dfrac{\alpha!}{(\alpha-n)!} & (n \leq \alpha) \\ 0 & (n > \alpha) \end{cases} \tag{4.2.52}$$

と求まる．よってテーラー級数は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!n!}x^n = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n \tag{4.2.53}$$

と得られる．この展開式は有限項の和であり，有限次数の多項式である．α が自然数のときのテーラー展開は二項展開となる．展開式は多項式であり任意の実数 x に対して成立する．よって $|x| < \infty$ であり，収束半径は $r = \infty$ となる． □

問　教科書（p.191）問題 7-5 2, 3. □

定義 **（階乗の拡張）** α を実数とする．このとき $\alpha!$ を

$$\alpha! = \alpha(\alpha-1)!\,, \quad 0! = 1 \tag{4.2.54}$$

と定義する． □

例 **（階乗の具体例）** α が自然数 n のとき

$$\alpha! = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 \tag{4.2.55}$$

である．α が自然数ではないとき

$$\alpha! = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots = \prod_{n=0}^{\infty}(\alpha-n) \tag{4.2.56}$$

となり無限積で表わされる．例えば $\alpha = 1/2$ のときは

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\cdots = \prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}-n\right) \tag{4.2.57}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots = \prod_{n=0}^{\infty}\frac{-2n+1}{2} \tag{4.2.58}$$

となる． □

定義 **（二項係数の拡張）** 実数 α, 自然数 n に対して

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} \tag{4.2.59}$$

と定義する． □

例 **（二項係数の具体例）** α が自然数 m のときは

$$\binom{\alpha}{n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!} \tag{4.2.60}$$

であり通常の二項係数と等しい．$\alpha = 1/2, n = 3$ のとき

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{16} \tag{4.2.61}$$

となる．$\alpha = -2, n = 3$ のとき

$$\binom{-2}{3} = \frac{(-2)(-3)(-4)}{3\cdot 2\cdot 1} = -4 \tag{4.2.62}$$

となる． □

注意（三角関数と指数関数）　三角関数と指数関数は

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{ix}}{2} \tag{4.2.63}$$

の関係にある．ここで $e^{\pm ix}$ は複素指数関数である．複素指数関数は複素数 $z = x + iy$ に対して

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \tag{4.2.64}$$

と定義される．右辺は複素巾級数である．この定義より関係式が自然に導出される．このとき $x = 0$ とし $z = iy$ とおく．すると

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\,y)^n}{n!} = 1 + iy + i^2\frac{y^2}{2} + i^3\frac{y^3}{3!} + i^4\frac{y^4}{4!} + i^5\frac{y^5}{5!} + i^6\frac{y^6}{6!} + \cdots \tag{4.2.65}$$

$$= 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots \tag{4.2.66}$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \cdots\right) \tag{4.2.67}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} y^{2n-2}}{(2n-2)!} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} y^{2n-1}}{(2n-1)!} \tag{4.2.68}$$

$$= \cos y + i \sin y \tag{4.2.69}$$

を得る．同様に $z = -iy$ とおくと

$$e^{-iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\,y)^n}{n!} \tag{4.2.70}$$

$$= 1 + i(-y) + i^2\frac{(-y)^2}{2} + i^3\frac{(-y)^3}{3!} + i^4\frac{(-y)^4}{4!} + i^5\frac{(-y)^5}{5!} + i^6\frac{(-y)^6}{6!} + \cdots \tag{4.2.71}$$

$$= 1 + i(-y) - \frac{(-y)^2}{2} - i\frac{(-y)^3}{3!} + \frac{(-y)^4}{4!} + i\frac{(-y)^5}{5!} - \frac{(-y)^6}{6!} + \cdots \tag{4.2.72}$$

$$= \left(1 - \frac{(-y)^2}{2} + \frac{(-y)^4}{4!} - \frac{(-y)^6}{6!} + \cdots\right) + i\left((-y) - \frac{(-y)^3}{3!} + \frac{(-y)^5}{5!} \cdots\right) \tag{4.2.73}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^{2n-2} y^{2n-2}}{(2n-2)!} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^{2n-1} y^{2n-1}}{(2n-1)!} \tag{4.2.74}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} y^{2n-2}}{(2n-2)!} - i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} y^{2n-1}}{(2n-1)!} \tag{4.2.75}$$

$$= \cos y - i \sin y \tag{4.2.76}$$

を得る．これより最初の関係式を得る．　□

§ 4.3 テイラー展開

テイラー級数では関数 $f(x)$ を無限和で表す．次のテイラー展開では有限項の和で $f(x)$ を表す．

定理（**テイラー展開**） 関数 $f(x)$ が $n+1$ 回微分可能なとき，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x)\,, \tag{4.3.1}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \xi = a + \theta(x-a) \quad (0 \le \theta \le 1) \tag{4.3.2}$$

が成り立つ．ただし点 $x=a$ は定義内の点である．この展開式を $f(x)$ の**テイラー展開**（**Taylor expansion**）と呼ぶ．特に $a=0$ のときを**マクローリン展開**（**Maclaurin expansion**）と呼ぶ．R_n は**剰余項**（**remainder**）と呼ばれる．

□

注意 点 ξ は点 a と点 x とを $\theta : 1-\theta$ に内分する点である．

□

定理（**平均値の定理**） 関数 $f(x)$ が $a \le x \le b$ で連続で，$a < x < b$ で微分可能ならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)\,, \qquad \xi = b + \theta(b-a) \quad (0 \le \theta \le 1) \tag{4.3.3}$$

を満たす ξ が存在する．

□

例（**テイラー展開の具体例**）

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)\,, \tag{4.3.4}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 \le \theta \le 1) \tag{4.3.5}$$

□

例（**テイラー展開の具体例**）

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + R_{2n+1}(x)\,, \tag{4.3.6}$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n \cos(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad (0 \le \theta \le 1) \tag{4.3.7}$$

$$\tag{4.3.8}$$

□

§ 4.4 テイラー級数による関数の近似

定義 **（関数の近似）** 関数 $f(x)$ をテイラー級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{4.4.1}$$

で表わし，n 次の項で打ち切った関数

$$\tilde{f}_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{4.4.2}$$

を $f(x)$ の n 次近似と呼ぶ. □

具体的に書くと

$$0\text{ 次近似：}\quad f(x) \simeq \tilde{f}_0(x) = f(a) \quad \leftarrow \text{定数} \tag{4.4.3}$$

$$1\text{ 次近似：}\quad f(x) \simeq \tilde{f}_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \quad \leftarrow \text{直線，接線の方程式} \tag{4.4.4}$$

$$2\text{ 次近似：}\quad f(x) \simeq \tilde{f}_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \quad \leftarrow \text{放物線} \tag{4.4.5}$$

$$\vdots \tag{4.4.6}$$

$$n\text{ 次近似：}\quad f(x) \simeq \tilde{f}_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots \tag{4.4.7}$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \leftarrow n\text{ 次多項式} \tag{4.4.8}$$

と表される．テイラー級数による関数の近似では $f(x)$ を多項式で近似する．

注意 近似式 $\tilde{f}_n(x)$ は曲線 $y = f(x)$ に点 $x = a$ で接する n 次多項式である． □

例 （関数の近似の具体例）

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{4.4.9}$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}_0(x) = 1 \tag{4.4.10}$$
$$f(x) \simeq \tilde{f}_1(x) = 1 + x \tag{4.4.11}$$
$$f(x) \simeq \tilde{f}_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \tag{4.4.12}$$
$$f(x) \simeq \tilde{f}_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \tag{4.4.13}$$

□

例 （関数の近似の具体例）

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \tag{4.4.14}$$

$$f(x) \simeq \tilde{f}_0(x) = 0 \tag{4.4.15}$$
$$f(x) \simeq \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) = x \tag{4.4.16}$$
$$f(x) \simeq \tilde{f}_3(x) = \tilde{f}_4(x) = x - \frac{x^3}{6} \tag{4.4.17}$$
$$f(x) \simeq \tilde{f}_5(x) = \tilde{f}_6(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \tag{4.4.18}$$

□

§ 4.5 近似関数の誤差の評価

関数 $f(x)$ の n 次近似式 $\tilde{f}_n(x)$ の誤差 $e_n(x)$ を考える．テイラー展開

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x) \tag{4.5.1}$$

より

$$f(x) = \tilde{f}_n(x) + R_{n+1}(x) \tag{4.5.2}$$

が成り立つ．**誤差（error）**を

$$e_n(x) = |\tilde{f}_n(x) - f(x)| \tag{4.5.3}$$

と定義すると，上の式より誤差は

$$e_n(x) = |\tilde{f}_n(x) - f(x)| = |R_{n+1}(x)| \tag{4.5.4}$$

と表される．

例 **（誤差の評価の具体例）**　$f(x) = \sin x$ を多項式で近似する．$x = 0$ まわりでテイラー展開して近似式を計算すると

$$0\text{ 次近似：}\quad f(x) \simeq \tilde{f}_0(x) = 0 \tag{4.5.5}$$
$$1\text{ 次近似：}\quad f(x) \simeq \tilde{f}_1(x) = x \tag{4.5.6}$$
$$3\text{ 次近似：}\quad f(x) \simeq \tilde{f}_3(x) = x - \frac{x^3}{6} \tag{4.5.7}$$
$$5\text{ 次近似：}\quad f(x) \simeq \tilde{f}_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \tag{4.5.8}$$

を得る．誤差 $e_n(x)$ は

$$e_0(x) = |\tilde{f}_0(x) - f(x)| = |R_1(x)| = |x\cos\theta x| < |x| \tag{4.5.9}$$
$$e_1(x) = |\tilde{f}_1(x) - f(x)| = |R_3(x)| = \left|\frac{x^3\cos\theta x}{6}\right| < \frac{|x|^3}{6} \tag{4.5.10}$$
$$e_3(x) = |\tilde{f}_3(x) - f(x)| = |R_5(x)| = \left|\frac{x^5\cos\theta x}{120}\right| < \frac{|x|^5}{120} \tag{4.5.11}$$
$$e_5(x) = |\tilde{f}_5(x) - f(x)| = |R_7(x)| = \left|\frac{x^7\cos\theta x}{7!}\right| < \frac{|x|^7}{7!} \tag{4.5.12}$$

である．いま $x = 1$ のときの誤差を考える．このとき誤差は

$$e_0(1) < 1 \quad \to \quad e_0 \sim 1 \tag{4.5.13}$$
$$e_1(1) < \frac{1}{6} = 0.1666... \quad \to \quad e_1 \sim 2 \times 10^{-1} \tag{4.5.14}$$
$$e_3(1) < \frac{1}{120} = 0.008333... \quad \to \quad e_3 \sim 8 \times 10^{-3} \tag{4.5.15}$$
$$e_5(1) < \frac{1}{7!} = 0.000198... \quad \to \quad e_5 \sim 2 \times 10^{-4} \tag{4.5.16}$$

となる．近似の次数が大きいほど誤差は小さい．次に誤差 $e_n(x)$ が 0.01 以下となるような x の範囲を求める．上の誤差の評価式より

$$e_0(x) < |x| < 0.01 \quad \to \quad |x| < 0.01 \tag{4.5.17}$$
$$e_1(x) < \frac{|x|^3}{6} < 0.01 \quad \to \quad |x|^3 < 0.06 \quad \to \quad |x| < 0.391 \tag{4.5.18}$$
$$e_3(x) < \frac{|x|^5}{120} < 0.01 \quad \to \quad |x|^5 < 1.2 \quad \to \quad |x| < 1.04 \tag{4.5.19}$$
$$e_5(x) < \frac{|x|^7}{7!} < 0.01 \quad \to \quad |x|^5 < 50.4 \quad \to \quad |x| < 1.75 \tag{4.5.20}$$

となる．近似の次数が上がるほど x の範囲が広がっている．　□

問　教科書（p.69）問題 3–6 1.　□

§ 4.6 ランダウの記号

定義（ランダウの記号） 関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0 \tag{4.6.1}$$

が成り立つとき,

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a) \tag{4.6.2}$$

と表記する．$o(\cdot)$ は**ランダウ（Landau）の記号**と呼ばれる．またこのとき，f は g に比べ**無視できる**という.

□

定義（ランダウの記号） 関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = b < \infty \tag{4.6.3}$$

が成り立つとき,

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to a) \tag{4.6.4}$$

と表記する．$O(\cdot)$ は**ランダウ（Landau）の記号**と呼ばれる．またこのとき f は g で**押さえられる**という.

□

注意（二つのランダウの記号の関係） 関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to a) \tag{4.6.5}$$

が成り立つとき，$b \neq 0$ であれば $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)} - b\right) = 0$ となるので

$$f(x) = b\,g(x) + o(g(x)) \quad (x \to a) \tag{4.6.6}$$

が成り立つ.

□

定義（無限大，無限小） 関数 $f(x), g(x)$ が $x \to a$ において無限小または無限大となるとき，次の呼び方を定義する.

- $f \to 0$, $g \to 0$, $f = o(g)$ $(x \to a)$ のとき，f は g より**高次の無限小**と呼ぶ．または g は f より**低次の無限小**と呼ぶ.
- $f \to \pm\infty$, $g \to \pm\infty$, $f = o(g)$ $(x \to a)$ のとき，f は g より**低次の無限大**と呼ぶ．または g は f より**高次の無限大**と呼ぶ.
- $f \to 0$, $g \to 0$, $f = O(g)$ $(x \to a)$ のとき，f と g とは**同次の無限小**と呼ぶ.
- $f \to \pm\infty$, $g \to \pm\infty$, $f = O(g)$ $(x \to a)$ のとき，f と g とは**同次の無限大**と呼ぶ.

□

例（ランダウの記号の使用例）

$$e^x = 1 + x + O(x^2) = 1 + x + o(x) \quad (x \to 0) \tag{4.6.7}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0) \tag{4.6.8}$$

$$\sin x = x + O(x^3) = x + o(x) \quad (x \to 0) \tag{4.6.9}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad (x \to 0) \tag{4.6.10}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0) \tag{4.6.11}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad (x \to 0) \tag{4.6.12}$$

□

注意（テイラー展開とランダウの記号）　テイラー展開

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x)\,, \tag{4.6.13}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (0 \le \theta \le 1) \tag{4.6.14}$$

を考える．このとき

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| = \lim_{x\to a}\left|\frac{f^{(n+1)}(x+\theta(x-a))}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\right| < \infty \tag{4.6.15}$$

となるから，

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + O\left((x-a)^{n+1}\right) \tag{4.6.16}$$

が成り立つ．同様に

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n}}\right| = \lim_{x\to a}\left|\frac{f^{(n+1)}(x+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} \times 0\right| = 0 \tag{4.6.17}$$

となるから

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \tag{4.6.18}$$

が成り立つ．

□

§ 4.7 テイラー級数を用いた関数の極限の計算

関数

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{4.7.1}$$

の $x \to 0$ における極限を考える．$f(x)$ をテイラー級数で表わしたのち関数の極限を求める．すなわち

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\{f(x) \text{ の } x = 0 \text{ まわりでのテイラー級数}\} \tag{4.7.2}$$

として計算する．まず分子である $\sin x$ をテイラー展開すると

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7) \tag{4.7.3}$$

となる．次に分子 $\sin x$ を分母 x で割り，$f(x)$ のテイラー展開を求める．すなわち

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^6}{5!} + O(x^6) \tag{4.7.4}$$

を得る．もとの関数とテイラー級数で表わした関数とは等価なものである．よって

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^6}{5!} + O(x^6)\right) = 1 - 0 + 0 + 0 = 1 \tag{4.7.5}$$

を得る．関数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ はもともと点 $x = 0$ において値が定義されていない．しかしながら，等価な式であるテイラー級数では，点 $x = 0$ は特別な点ではない．点 $x = 0$ は見かけの不連続点である．ある関数に不連続点があるとき，その不連続点が取り除けるかどうかは，その関数をテイラー級数表示をすればよい．

問 教科書（p.69）問題 3–6 2. □

例 **（テイラー展開を用いた極限の計算の例）**　関数

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x}-x \tag{4.7.6}$$

に対して極限 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を考える．このとき

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\{f(x) \text{ の } x=\infty \text{ まわりのテイラー級数}\} \tag{4.7.7}$$

として極限を求める．しかしながら，巾級数 $\sum c_n(x-\infty)^n$ は存在しない．そこで変数を $y=1/x$ と導入する．すると極限は

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{y\to 0} f\left(\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to 0}\left\{f\left(\frac{1}{y}\right) \text{ の } y=0 \text{ まわりのテイラー級数}\right\} \tag{4.7.8}$$

と表わされる．$f(1/y)$ を計算すると

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=\sqrt{\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}}-\frac{1}{y}=\frac{1}{y}\left(\sqrt{1-2y}-1\right) \tag{4.7.9}$$

となる．まず $\sqrt{1-2y}$ をテイラー展開すると

$$\sqrt{1-2y}=1+\frac{1}{2}(-2y)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2\cdot 1}(-2y)^2+O\left((-2y)^3\right) \tag{4.7.10}$$

$$=1-y-\frac{1}{2}y^2+O(y^3) \tag{4.7.11}$$

を得る．これを用いて $f(1/y)$ のテイラー展開を求めると

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{y}\left\{\left(1-y-\frac{1}{2}y^2+O(y^3)\right)-1\right\} \tag{4.7.12}$$

$$=\frac{1}{y}\left(-y-\frac{1}{2}y^2+O(y^3)\right) \tag{4.7.13}$$

$$=-1-\frac{1}{2}y+O(y^2) \tag{4.7.14}$$

となる．よって極限は

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{y\to 0} f\left(\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to 0}\left\{-1-\frac{1}{2}y+O(y^2)\right\}=-1+0+0=-1 \tag{4.7.15}$$

と得られる．

□

§ 4.8 関数の増減と極値

定義（増加，減少，極値）　h を十分小さい正の数 $h>0$ とする．このとき関数 $f(x)$ に関して次の性質を定義する．

- $f(a-h)<f(a)<f(a+h)$ を満たすとき，関数 $f(x)$ は点 $x=a$ において**増加の状態**であるという．
- $f(a-h)>f(a)>f(a+h)$ を満たすとき，関数 $f(x)$ は点 $x=a$ において**減少の状態**であるという．
- $f(a-h)<f(a)>f(a+h)$ を満たすとき，関数 $f(x)$ は点 $x=a$ において**極大値** $f(a)$ をとるという．
- $f(a-h)>f(a)<f(a+h)$ を満たすとき，関数 $f(x)$ は点 $x=a$ において**極小値** $f(a)$ をとるという．

極大値，極小値を総称して**極値**と呼ぶ．　□

定理（微分係数と増減，極値）　微分係数と関数の増減および極値の関係に関して次のことがいえる．

- $f'(a)>0$ のとき，$f(x)$ は点 $x=a$ において増加の状態にある．
- $f'(a)<0$ のとき，$f(x)$ は点 $x=a$ において減少の状態にある．
- $f'(a)=0,\ f''(a)<0$ のとき，$f(x)$ は点 $x=a$ において極大値をとる．
- $f'(a)=0,\ f''(a)>0$ のとき，$f(x)$ は点 $x=a$ において極小値をとる．

（証明）関数 $f(x)$ をテイラー展開して

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+O\left((x-a)^3\right) \tag{4.8.1}$$

を得る．$x=a\pm h$ とおくと

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)\,h+\frac{f''(a)}{2}h^2+O(h^3) \tag{4.8.2}$$

$$f(a-h)=f(a)-f'(a)\,h+\frac{f''(a)}{2}h^2+O(h^3) \tag{4.8.3}$$

となる．h を十分小さな正の値として考える．h^3 以降の項は十分小さく無視できる．$f'(a)>0$ のとき

$$f(a)-f'(a)\,h<f(a)<f(a)+f'(a)\,h \tag{4.8.4}$$

が成り立つので，テイラー展開の 2 次の項を無視すれば

$$f(a-h) < f(a) < f(a+h) \tag{4.8.5}$$

を得る．よって $f(x)$ は増加の状態にある．次に $f'(a) < 0$ のとき，同様に

$$\begin{aligned} f(a) - f'(a)\,h > f(a) > f(a) + f'(a)\,h \quad (4.8.6) \\ \Rightarrow f(a-h) > f(a) > f(a+h) \quad (4.8.7) \end{aligned}$$

となるので， $f(x)$ は減少の状態にある．次に $f'(a) = 0,\ f''(a) < 0$ のとき，

$$\begin{aligned} f(a) + \frac{f''(a)}{2}\,h^2 < f(a) > f(a) + \frac{f''(a)}{2}\,h^2 \quad (4.8.8) \\ \Rightarrow f(a-h) < f(a) > f(a+h) \quad (4.8.9) \end{aligned}$$

となるので，$f(x)$ は $x = a$ において極大値をとる．最後に $f'(a) = 0,\ f''(a) > 0$ のとき，

$$\begin{aligned} f(a) + \frac{f''(a)}{2}\,h^2 > f(a) < f(a) + \frac{f''(a)}{2}\,h^2 \quad (4.8.10) \\ \Rightarrow f(a-h) > f(a) < f(a+h) \quad (4.8.11) \end{aligned}$$

となるので，$f(x)$ は $x = a$ において極小値をとる． □

問 教科書（p.58）問題 3-4. □

§ 4.9 解析関数

定義 **（解析関数）** 関数 $f(x)$ がテイラー級数で表されるとき, 関数 $f(x)$ は**解析的（analytic）**であるという．解析的な関数を**解析関数（analytic function）**と呼ぶ． □

定理 **（解析関数の性質）** 関数 $f(x), g(x)$ が解析的であるとき，次の関数

$$\alpha f(x) + \beta g(x) , \quad f(x)g(x) , \quad \frac{f(x)}{g(x)} , \quad f(g(x)) \tag{4.9.1}$$

もまた解析的である． □

例 **（テイラー級数の計算例）** 関数 $f(x) = e^x$ のテイラー級数は

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \tag{4.9.2}$$

と表わされる．このとき $g(x) = e^{\alpha x}$ のテイラー級数を求める．$g(x)$ は $f(x)$ を用いると $g(x) = f(\alpha x)$ と書ける．$f(x)$ のテイラー級数の x に αx を代入すると

$$g(x) = e^{\alpha\, x} = 1 + (\alpha\, x) + \frac{1}{2}(\alpha\, x)^2 + \frac{1}{6}(\alpha\, x)^3 + \cdots \tag{4.9.3}$$

$$= 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3}{6}x^3 + \cdots \tag{4.9.4}$$

を得る．この展開式はテイラー級数の公式を $g(x)$ に適用したものと同じものとなる．同様に $g(x) = e^{-x^2}$ のテイラー級数は

$$g(x) = f(-x^2) = e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{1}{2}(-x^2)^2 + \frac{1}{6}(-x^2)^3 + \cdots \tag{4.9.5}$$

$$= 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \cdots \tag{4.9.6}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n} \tag{4.9.7}$$

と求まる． □

例　**（テイラー級数の計算例）**

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \tag{4.9.8}$$

$$\frac{1}{1-x-x^2} = 1 + \left(x + x^2\right) + \left(x + x^2\right)^2 + \left(x + x^2\right)^3 + \cdots \tag{4.9.9}$$

$$= 1 + (x + x^2) + (x^2 + 2x^3 + x^4) + (x^3 + 3x^4 + 3x^5 + x^6) + \cdots \tag{4.9.10}$$

$$= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots \tag{4.9.11}$$

□

例　**（テイラー級数の計算例）**

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \cdots \tag{4.9.12}$$

$$\sqrt{1-x-x^2} = 1 - \frac{1}{2}(x + x^2) - \frac{1}{8}(x + x^2)^2 - \frac{1}{16}(x + x^2)^3 + \cdots \tag{4.9.13}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)x^2 - \left(\frac{2}{8} + \frac{1}{16}\right)x^3 + \cdots \tag{4.9.14}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots \tag{4.9.15}$$

□

例　**（テイラー級数の計算例）**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{4.9.16}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \tag{4.9.17}$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \tag{4.9.18}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n!}x^n \tag{4.9.19}$$

$$(n = 2k, n = 2k+1; k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{4.9.20}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^{2k}}{(2k)!}x^{2k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1} \tag{4.9.21}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} \tag{4.9.22}$$

$$(k \to n-1; n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{4.9.23}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} \tag{4.9.24}$$

□

問　**（テイラー級数の計算）**　$\cosh x$ のテイラー級数を求めよ．　□

§ 4.10 項別微分

例 **(項別微分の具体例)**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \tag{4.10.1}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = \frac{d}{dx}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} + \cdots\right) \tag{4.10.2}$$

$$= \frac{d}{dx}1 + \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3!}x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4!}x^4\right) + \cdots \tag{4.10.3}$$

$$\cdots + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n!}x^n\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}\right) + \cdots \tag{4.10.4}$$

$$= 0 + 1 + \frac{2}{2}x^2 + \frac{3}{3!}x^2 + \frac{4}{4!}x^3 + \cdots + \frac{n}{n!}x^{n-1} + \frac{n+1}{(n+1)!}x^n + \cdots \tag{4.10.5}$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \tag{4.10.6}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \tag{4.10.7}$$

$$= e^x \tag{4.10.8}$$

□

例 **(項別微分の具体例)**

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{4.10.9}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right) \tag{4.10.10}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \cos x \tag{4.10.11}$$

□

例 **(項別微分の具体例)**

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \cdots \tag{4.10.12}$$

$$\frac{d}{dx}\log(1+x) = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1+x} \tag{4.10.13}$$

□

問 これを示せ. □

例 **（テーラー級数の微分）**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{4.10.14}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{4.10.15}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right) \tag{4.10.16}$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right) \tag{4.10.17}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{n}{n!}(x-a)^{n-1} \tag{4.10.18}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \tag{4.10.19}$$

$$(m = n-1; n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{4.10.20}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m+1)}(a)}{m!}(x-a)^m \tag{4.10.21}$$

$$(m \to n) \tag{4.10.22}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f')^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{4.10.23}$$

$$= f'(x) \tag{4.10.24}$$

$f(x)$ に関するテーラー級数を微分したものは，$f'(x)$ に関するテーラー級数となる．テーラー級数は微分演算に対して不変である．

□

§ 4.11　項別積分

関数 $f(x) = \arctan x$ を考える．$f(x)$ のテイラー級数を求める．このとき $f^{(n)}(x)$ の計算は面倒であるので別の方法を考える．そこで次のような項別積分を用いてテイラー級数を求める．まず $f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{4.11.1}$$

である．これをテイラー級数で表わす．そのためまず

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \tag{4.11.2}$$

を用意する．x に x^2 を代入すれば

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \tag{4.11.3}$$

を得る．両辺を不定積分をすると

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n}\, dx & (4.11.4)\\
&= \int dx + -\int x^2\, dx + +\int x^4\, dx + \cdots + (-1)^n \int x^{2n}\, dx + \cdots & (4.11.5)\\
&= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots & (4.11.6)\\
&= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} & (4.11.7)\\
&\quad (n \to n-1) & (4.11.8)\\
&= C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} & (4.11.9)
\end{aligned}$$

を得る．定数項 C には不定性が残っている．これを定める．$x = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned}
\arctan 0 &= C + 0 + 0 + \cdots & (4.11.10)\\
\to C &= \arctan 0 = 0 & (4.11.11)
\end{aligned}$$

を得る．以上より $f(x)$ のテイラー級数として

$$f(x) = \arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \tag{4.11.12}$$

が求まる．

§ 4.12 テイラー級数の導出

巾級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \tag{4.12.1}$$

を考える．関数 $f(x)$ が与えられたとし，テイラー級数の係数 $\{c_n\}$ を導出する．x が a に十分近いとき $(x-a)^n$ は次数 n が大きいほど小さくなる．つまり小さい次数の項が主要な項となる．よって小さい次数の係数より順に値を定めて行く．

まず巾級数

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + c_5(x-a)^5 + \cdots \tag{4.12.2}$$

に $x=a$ を代入する．すると

$$f(a) = c_0 + 0 + 0 + \cdots = c_0 \tag{4.12.3}$$

となる．よって係数を $c_0 = f(a)$ と定める．巾級数は

$$f(x) = f(a) + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + c_5(x-a)^5 + \cdots \tag{4.12.4}$$

となる．両辺を微分すると

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + 5c_5(x-a)^4 + \cdots \tag{4.12.5}$$

を得る．ここに $x=a$ を代入すると

$$f'(a) = c_1 + 0 + 0 + \cdots = c_1 \tag{4.12.6}$$

となるので係数を $c_1 = f'(a)$ と定める．このとき巾級数とその導関数は

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + c_5(x-a)^5 + \cdots \tag{4.12.7}$$

$$f'(x) = f'(a) + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + 5c_5(x-a)^4 + \cdots \tag{4.12.8}$$

となる．これで 1 次の項までの係数が定まった．$f(x)$ の最初の二つの項までをみると $x=a$ における接線の方程式となっている．次に 2 階，3 階の導関数と求めて行くと

$$f''(x) = 2\cdot c_2 + 3\cdot 2\cdot c_3(x-a) + 4\cdot 3\cdot c_4(x-a)^2 + 5\cdot 4\cdot c_5(x-a)^3 + \cdots \tag{4.12.9}$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2\cdot c_3 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot c_4(x-a) + 5\cdot 4\cdot 3\cdot c_5(x-a)^2 + \cdots \tag{4.12.10}$$

$$f^{(4)}(x) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot c_4 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot c_5(x-a) + \cdots \tag{4.12.11}$$

$$f^{(5)}(x) = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot c_5 + \cdots \tag{4.12.12}$$

となる．$x=a$ を代入すると

$$f''(a) = 2\cdot c_2 + 0 + 0 + \cdots \tag{4.12.13}$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2\cdot c_3 + 0 + 0 + \cdots \tag{4.12.14}$$

$$f^{(4)}(a) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot c_4 + 0 + 0 + \cdots \tag{4.12.15}$$

$$f^{(5)}(x) = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot c_5 + 0 + 0 + \cdots \tag{4.12.16}$$

となるので係数が

$$c_2 = \frac{f''(a)}{2!}\,, \quad c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}\,, \quad c_4 = \frac{f^{(4)}(a)}{4!}\,, \quad c_5 = \frac{f^{(5)}(a)}{5!} \tag{4.12.17}$$

と定まる．同様な操作を繰り返せば

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{4.12.18}$$

を得る．

§ 4.13 ちょっとまとめ

1. ∞ 回微分可能な任意の関数 $f(x)$ は巾級数（テイラー級数）で表わされる．
2. 巾級数が与えられたとき，巾級数は関数を一つ定める．
3. もとの関数で議論しても，巾級数で議論しても等価である．
4. 計算の都合が良い方で行なう．
5. 極限，微分，積分の計算において計算しやすい方を用いる．
6. 関数を多項式近似するとき，テイラー展開を用いると議論がしやすい．
7. 関数の局所的な性質が議論しやすい． $\rightarrow$ 増減，極値

5 積分法

積分法には次の二つの積分がある．

- 不定積分 $\cdots\cdots$ 微分の逆演算
- 定積分 $\cdots\cdots$ 面積の計算

それぞれ意味，定義は異なる．まずはそれぞれ独立に定義，性質をみる．その後この二つの積分の間にある関係を考える．

§ 5.1 不定積分

関数 $f(x)$ に関して x で "微分をする" という操作を $\dfrac{d}{dx}$ という**演算子，作用素（operator）**で表すとする．すなわち関数 $f(x)$ に微分演算 $\dfrac{d}{dx}$ を作用させるとは

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) \tag{5.1.1}$$

のことである．この微分演算の逆演算を考える．これを $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^{-1}$ と表記し

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} f(x) = F(x) \tag{5.1.2}$$

と表すことにする．逆演算により得られる関数 $F(x)$ は方程式

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{5.1.3}$$

を満たす関数と定義する．定義からただちに分かるように，ある関数 $F(x)$ が方程式 (5.1.3) を満たすとき，C を任意定数として関数 $F(x)+C$ もまた方程式 (5.1.3) を満たす．よって必ず

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} f(x) = F(x) + C \tag{5.1.4}$$

が成り立つ．微分の逆演算 $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^{-1}$ は通常 $\displaystyle\int dx$ という記号を用いる．これで書き直すと

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{5.1.5}$$

と表せる．

$\boxed{\textbf{定義}}$ **（不定積分）**　関数 $f(x)$ に対して，微分演算 $\dfrac{d}{dx}$ の逆演算を $\displaystyle\int dx$ と表記し，

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{5.1.6}$$

と定義する．ただし C は任意定数である．$\displaystyle\int f(x)\,dx$ を**不定積分**，$f(x)$ を**被積分関数**，C を**積分定数**，$F(x)$ を**原始関数**と呼ぶ．

□

§ 5.2　不定積分の性質

定理　**（不定積分の性質）**

$$\text{(1)}\qquad \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x) \tag{5.2.1}$$

$$\text{(2)}\qquad \int F'(x)\,dx = F(x) + C \tag{5.2.2}$$

$$\text{(3)}\qquad \int (\alpha f(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \tag{5.2.3}$$

$$\text{(4)}\qquad \int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \tag{5.2.4}$$

（証明）

□

問　これを示せ．

□

§ 5.3 不定積分の基本的な計算

$$\frac{d}{dx}x = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \int dx = x + C \tag{5.3.1}$$

$$\frac{d}{dx}x^{n+1} = (n+1)x^n \quad\Leftrightarrow\quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \tag{5.3.2}$$

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha+1} = (\alpha+1)x^\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1) \tag{5.3.3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x} & (x > 0) \\ \dfrac{d}{dx}\log(-x) = \dfrac{1}{x} & (x < 0) \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C \tag{5.3.4}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \quad\Leftrightarrow\quad \int e^x\,dx = e^x + C \tag{5.3.5}$$

$$\frac{d}{dx}a^x = (\log a)a^x \quad\Leftrightarrow\quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1) \tag{5.3.6}$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \quad\Leftrightarrow\quad \int \sin x\,dx = -\cos x + C \tag{5.3.7}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \quad\Leftrightarrow\quad \int \cos x\,dx = \sin x + C \tag{5.3.8}$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad\Leftrightarrow\quad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \tag{5.3.9}$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad\Leftrightarrow\quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \quad (|x| < 1) \tag{5.3.10}$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \quad\Leftrightarrow\quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C \tag{5.3.11}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \quad\Leftrightarrow\quad \int \sinh x\,dx = \cosh x + C \tag{5.3.12}$$

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x \quad\Leftrightarrow\quad \int \cosh x\,dx = \sinh x + C \tag{5.3.13}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad\Leftrightarrow\quad \int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C \tag{5.3.14}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{arcsinh}\,x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad\Leftrightarrow\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \mathrm{arcsinh}\,x + C \tag{5.3.15}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{arccosh}\,x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad\Leftrightarrow\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \mathrm{arccosh}\,x + C \quad (|x| > 1) \tag{5.3.16}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{arctanh}\,x = \frac{1}{1-x^2} \quad\Leftrightarrow\quad \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \mathrm{arctanh}\,x + C \quad (x \neq 1) \tag{5.3.17}$$

例

$$\int x^8 \, dx = \tag{5.3.18}$$

$$\int x^{\frac{1}{4}} \, dx = \tag{5.3.19}$$

$$\int \frac{dx}{x^3} = \tag{5.3.20}$$

$$\int (x^3 - x^2 + 3x - 2) \, dx = \tag{5.3.21}$$

□

§ 5.4 置換積分法

定理 **（置換積分法）** 積分変数を $x = \phi(t)$ と変換すると

$$\int f(x)\,dx = \int f(\phi(x))\phi'(t)\,dt = \int f(\phi(x))\frac{dx}{dt}\,dt \tag{5.4.1}$$

となる．また逆に

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(\psi(x)) + C \tag{5.4.2}$$

と積分変数を $t = \psi(x)$ と置き換えて積分する． □

例

$$I = \int (ax+b)^m\,dx = \tag{5.4.3}$$

$$I = \int \cos(ax+b)\,dx = \tag{5.4.4}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \tag{5.4.5}$$

□

§ 5.5 部分積分法

定理 **（部分積分）**

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \tag{5.5.1}$$

□

例

$$I = \int \log x\,dx = \tag{5.5.2}$$

$$I = \int x\sin x\,dx = \tag{5.5.3}$$

□

§ 5.6 有理関数の積分

有理関数

$$
f(x) = \frac{a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0\, x^m + b_1\, x^{m-1} + \cdots + b_m} \qquad (n, m \in \mathbb{N}) \tag{5.6.1}
$$

は積分

$$
\int f(x)\, dx \tag{5.6.2}
$$

を考える．任意の有理関数は積分可能である．

§ 5.7 定積分

定義（定積分） 区間 $a \leq x \leq b$ を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \tag{5.7.1}$$

と分割する.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{5.7.2}$$

$$\xi_k \in I_k = \{x_k \leq x \leq x_{k-1}\} \tag{5.7.3}$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \tag{5.7.4}$$

□

§ 5.8 定積分の性質

$\boxed{\textbf{定理}}$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \tag{5.8.1}$$

□

§ 5.9 定積分と不定積分

定理

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b \tag{5.9.1}$$

$$F(x) = \int f(x)\,dx \tag{5.9.2}$$

□

§ 5.10 定積分の計算

定理 （置換積分）

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\frac{dx}{dt}dt \tag{5.10.1}$$

□

定理 （部分積分）

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \tag{5.10.2}$$

□

§ 5.11 広義積分

定義 **（不連続点を含む区間での広義積分）**　$x = a$ で不連続

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to +0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx \tag{5.11.1}$$

$x = b$ で不連続

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to +0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx \tag{5.11.2}$$

$x = c\ (a < c < b)$ で不連続

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon_1 \to +0} \int_{a+\epsilon_1}^b f(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to +0} \int_a^{b-\epsilon_2} f(x)\,dx \tag{5.11.3}$$

□

定理　$p > 0$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & (0 < p < 1) \\ +\infty & (p \geq 1) \end{cases} \tag{5.11.4}$$

□

定義 **（無限区間での広義積分）**

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx \tag{5.11.5}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \tag{5.11.6}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx \tag{5.11.7}$$

□

定理 $p > 0$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \begin{cases} +\infty & (0 < p \leq 1) \\ \dfrac{1}{1-p} & (p > 1) \end{cases} \tag{5.11.8}$$

□

§ 5.12 コーシーの主値積分

$\boxed{\textbf{定義}}$ **（コーシーの主値積分）**　$x = c\ (a < c < b)$ で不連続

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to +0} \left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)\,dx \right) \tag{5.12.1}$$

c における**コーシーの主値積分（Cauchy's principal values of integral）**

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to \infty} \left(\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \right) \tag{5.12.2}$$

∞ におけるコーシーの主値積分 $\square$

§ 5.13　曲線の長さ

$\boxed{\textbf{定理}}$ **（曲線の長さ）**

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{5.13.1}$$

□

§ 5.14 図形の面積

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx \tag{5.14.1}$$

§ 5.15 回転体の体積

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx \tag{5.15.1}$$