解析学Ｉ（１）（近藤）春学期期末試験

2002 年 7 月 18 日（木）9:20–10:30 TC1–116

[1]　次の数列の極限を求めよ.

(1)（２点）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3-2n)^2-1}{4n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-12n+8}{4n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-12/n+8/n^2}{4-1/n^2}=\frac{4-0+0}{4-0}=1$$

(2)（２点）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+n^2}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2/n+1}}{2-1/n}=\frac{\sqrt{0+1}}{2-0}=\frac{1}{2}$$

[2]　次の級数 S の値を求めよ.

(1)（３点）

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{4^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=6$$

または

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n=6-4\left(\frac{3}{4}\right)^n-2\left(\frac{1}{2}\right)^n\quad\Rightarrow\quad S=\lim_{n\to\infty}S_n=6$$

(2)（３点）

$$S=0.9999\cdots=\frac{9}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n=\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=1$$

または

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}=1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\quad\Rightarrow\quad S=\lim_{n\to\infty}S_n=1$$

[3]　次の関数 $f(x)$ の定義を書け.

(1)（２点）

$$f(x)=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

(2)（２点）

$$f(x)=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

(3)（２点）

$$f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

[4]　次の関数の極限を求めよ．

(1)（３点）

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{1} \times 1 = 1$$

(2)（３点）

$$\lim_{x\to +\infty} \tanh x = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

(3)（３点）

$$\lim_{x\to -\infty} \tanh x = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

[5]　次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(1)（３点）

$$f(x) = \arcsin x\,, \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2)（３点）

$$f(x) = \arccos x\,, \qquad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(3)（３点）

$$f(x) = \arctan x\,, \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(4)（２点）

$$f(x) = \sinh x\,, \qquad f'(x) = \cosh x$$

(5)（２点）

$$f(x) = \cosh x\,, \qquad f'(x) = \sinh x$$

(6)（２点）

$$f(x) = \tanh x\,, \qquad f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

(7)（３点）

$$f(x) = \operatorname{arcsinh} x\,, \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(8)（３点）

$$f(x) = \operatorname{arccosh} x\,, \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(9)（３点）

$$f(x) = \operatorname{arctanh} x\,, \qquad f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

(10)（４点）

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-(\frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma}})^2}\,, \\ f'(x) &= \left(-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma}}\right)^2\right)' e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma}}\right)^2} = -\frac{2(x-\mu)}{\sigma} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma}}\right)^2} \end{aligned}$$

(11)（５点）

$$\begin{aligned} f(x) &= a^x\,(b^x)^2\,(c^{x+x^2})^3 = a^x b^{2x} c^{3x+3x^2} = \left(ab^2c^3\right)^x \times c^{\left(3x^2\right)}\,, \\ f'(x) &= \left(\left(ab^2c^3\right)^x\right)' c^{\left(3x^2\right)} + \left(ab^2c^3\right)^x \left(c^{\left(3x^2\right)}\right)' \\ &= \left(\log\left(ab^2c^3\right)\right)\left(ab^2c^3\right)^x c^{\left(3x^2\right)} + \left(\left(ab^2c^3\right)^x\right)(\log c)c^{\left(3x^2\right)} \cdot (6x) \\ &= \left(\log\left(ab^2c^3\right)\right) a^x b^{2x} c^{3x+3x^2} + \left(\log c^{6x}\right) a^x b^{2x} c^{3x+3x^2} \\ &= \left(\log\left(ab^2c^3\right) + \log c^{6x}\right) a^x b^{2x} c^{3x+3x^2} \\ &= (\log ab^2c^{3+6x}) a^x b^{2x} c^{3x+3x^2} \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} f(x) &= a^x b^{2x} c^{3x+3x^2} \\ &\quad (\text{両辺の対数をとる}) \\ \log f(x) &= x\log a + 2x\log b + (3x+3x^2)\log c \\ &\quad (\text{両辺を微分する}) \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= \log a + 2\log b + (3+6x)\log c = \log ab^2c^{3+6x} \\ f'(x) &= \left(\log ab^2c^{3+6x}\right) f(x) \\ &= \left(\log ab^2c^{3+6x}\right) a^x b^{2x} c^{3x+3x^2} \end{aligned}$$

(12)（４点）

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(x-\sqrt{x^2-1})\,, \\ f'(x) &= \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)'}{x-\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{1-\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

[6]　次の巾級数 $f(x)$ の収束半径 r を求めよ．

(1)（４点）　$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$

$c_n = 1/n!$ とおく．

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

(2)（４点）　$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$

$c_n = (-1)^n$ とおく．

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

[7]　次の関数 $f(x)$ を $x=0$ まわりのテイラー級数で表し，$f(x)$ の 3 次の近似式 $\tilde{f}(x)$ を求めよ．

(1)（５点）　$f(x) = e^{\alpha x}$　(α は定数)

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ e^{\alpha x} &= 1 + (\alpha x) + \frac{(\alpha x)^2}{2} + \frac{(\alpha x)^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3}{3!}x^3 + \cdots \end{aligned}$$

$$\tilde{f}(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3}{6}x^3$$

(2)（５点）　$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,,\quad f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}\,,\quad f''(x) = \frac{3}{2^2}\frac{1}{\sqrt{(1-x)^5}}\,,\quad f'''(x) = \frac{3\cdot 5}{2^3}\frac{1}{\sqrt{(1-x)^7}}\,,$$

$$f(0)=1\,,\quad f'(0)=\frac{1}{2}\,,\quad f''(0)=\frac{3}{2^2}\,,\quad f'''(0)=\frac{3\cdot 5}{2^3}\,,$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \frac{f(0)}{0!}x^0+\frac{f'(0)}{1!}x^1+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3\\ &= \frac{1}{1}+\frac{\frac{1}{2}}{1}x^1+\frac{\frac{3}{2^2}}{2}x^2+\frac{\frac{3\cdot 5}{2^3}}{2\cdot 3}x^3\\ &= 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3\end{aligned}$$

[8]　次の不定積分 I を求めよ．

(1)（５点）

$$\begin{aligned}I &= \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}\\ &= \int\frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}}dx\\ &= \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{2}\right)+C \overset{\text{または}}{=\!=} \log(x+\sqrt{x^2+4})+C\end{aligned}$$

(2)（５点）

$$\begin{aligned}I &= \int\frac{dx}{1-2x^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\left(\sqrt{2}x\right)'}{1-\left(\sqrt{2}x\right)^2}dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctanh}(\sqrt{2}x)+C \overset{\text{または}}{=\!=} \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{1+\sqrt{2}x}{1-\sqrt{2}x}\right|+C\end{aligned}$$

[9]　次の定積分 I を求めよ．

(1)（５点）

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\\ &= \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b\frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\left[\arctan x\right]_a^b\\ &= \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}(\arctan b-\arctan a)\\ &= \lim_{b\to+\infty}\arctan b-\lim_{a\to-\infty}\arctan a\\ &= \frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \pi\end{aligned}$$

(2)（５点）

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^r \frac{4r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx \\
&= \lim_{\epsilon \to +0} \int_0^{r-\epsilon} \frac{4r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx \\
&= 4r \lim_{\epsilon \to +0} \int_0^{r-\epsilon} \frac{\left(\frac{x}{r}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} dx \\
&\quad (x = tr \text{ とおく}) \\
&= 4r \lim_{\epsilon \to +0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \\
&= 4r \lim_{\epsilon \to +0} [\arcsin x]_0^1 \\
&= 4r \lim_{\epsilon \to +0} (\arcsin(1-\epsilon) - \arcsin 0) \\
&= 4r \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\
&= 2\pi r
\end{aligned}
$$