線形代数学 I

近藤弘一

最終更新：平成 14 年 7 月 22 日

目 次

1 行列とベクトル

§ 1.1 行列

$\boxed{\textbf{定義}}$　$m \times n$ 個の数 a_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

と並べたものを**行列（matrix）**とよぶ．このとき行列 A は

- m 行 n 列の行列
- $m \times n$ 型の行列
- (m, n) 行列

という．行列の i 行 j 列番目の数を **(i, j) 成分（component）**または**要素（element）**と呼ぶ．i 番目の行

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \tag{2}$$

を**第 i 行（the i-th row）**という．j 番目の列

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \tag{3}$$

を**第 j 列（the j-th column）**という．行列 A を省略して書くときは

$$A = [a_{ij}] = [a_{ij}]_{m\times n} = \underset{m\times n}{[a_{ij}]} = [a_{ij}]_{\substack{i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,n}} = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \tag{4}$$

のようにする．　$\square$

§ 1.2 行列のいろいろ

定義（**零行列**） 成分が全て零の行列

$$O = O_{m,n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

を**零行列（zero matrix）**と呼ぶ．$O_{m,n}$ は $m \times n$ 型の零行列を意味する． □

定義（**正方行列**） 行と列の数が等しい行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{6}$$

を**正方行列（square matrix）**と呼ぶ．行列の成分のうち左上から右下へ並んでいる成分 a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn} を**対角成分（diagonal components）**と呼ぶ． □

定義（**対角行列**） 対角成分以外の成分が全て零の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \Large 0 \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ \Large 0 & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{7}$$

を**対角行列（diagonal matrix）**と呼ぶ． □

定義（**単位行列**） 対角成分がすべて 1 の対角行列

$$E = E_n = I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & & \Large 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ \Large 0 & & & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

を**単位行列（unit matrix）**と呼ぶ．$n \times n$ の単位行列を E_n と書き n 次の単位行列と呼ぶ．単位行列は後述するように行列の積において “1” の役割をはたす． □

定義（スカラー行列） 対角成分の値がすべて等しい対角行列を**スカラー行列**（**scalar matrix**）と呼ぶ. □

例（スカラー行列の具体例）

$$\begin{bmatrix} 2 & & \text{\huge 0} \\ & 2 & \\ \text{\huge 0} & & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & & \text{\huge 0} \\ & -1 & \\ \text{\huge 0} & & -1 \end{bmatrix}, \qquad E, \qquad O. \tag{9}$$

□

定義（上三角行列） 対角成分を除く左下半分がすべて 0 の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \text{\huge 0} & & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{10}$$

を**上三角行列**（**upper triangular matrix**）と呼ぶ. □

定義（下三角行列） 対角成分を除く右上半分がすべて 0 の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & & & \text{\huge 0} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{11}$$

を**下三角行列**（**lower triangular matrix**）と呼ぶ. □

定義 **（転置行列）**　行と列の成分を入れ換えた行列

$$
{}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{12}
$$

を**転置行列（transposed matrix）**と呼ぶ．行と列を入れ換える演算を**転置（transpose）**をとるという．転置された行列を ${}^tA$ と書く．また A^T と書くこともある．

□

例 **（転置の具体例）**

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad {}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}. \tag{13}
$$

□

問　${}^t({}^tA) = A$ を示せ．

（証明）$A = [a_{ij}]$, ${}^tA = [b_{ij}]$ とおく．行と列を入れ換えるので ${}^tA$ は ${}^tA = [a_{ji}]$ とも書ける．つまり $b_{ij} = a_{ji}$ となる．転置をとる操作を成分でみると，行と列の添字を入れ換える操作に対応する．よって

$$
{}^t({}^tA) = {}^t({}^t[a_{ij}]) = {}^t([a_{ji}]) = [a_{ij}] = A \tag{14}
$$

となる．証明終了．

□

$\boxed{\textbf{定義}}$ **（対称行列）**　${}^tA = A$ を満たす行列を**対称行列（symmetric matrix）**と呼ぶ．　□

$\boxed{\textbf{例}}$ **（対称行列の具体例）**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

□

$\boxed{\textbf{問}}$ **（対称行列の一般的な表現）**　対称行列は正方行列で一般に

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{16}$$

と表わされる．これを示せ．　□

$\boxed{\textbf{定義}}$ **（歪対称行列）**　${}^tA = -A$ を満たす行列を**歪対称行列（skew symmetric matrix）**または，**交代行列（alternative matrix）**と呼ぶ．　□

$\boxed{\textbf{例}}$ **（歪対称行列の具体例）**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

□

$\boxed{\textbf{問}}$ **（対称行列の一般的な表現）**　歪対称行列は正方行列で一般に

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

と表わされる．これを示せ．　□

$\boxed{\textbf{問}}$　教科書（p.5）問題 1.1.　□

§ 1.3　行ベクトル，列ベクトル

定義　**（行ベクトル）**　$1 \times n$ 行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \tag{19}$$

を n 次の**行ベクトル（row vector）**と呼ぶ． □

例　**（行ベクトルの具体例）**　4 次の行ベクトル：

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

□

定義　**（列ベクトル）**　$m \times 1$ 行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \tag{21}$$

を m 次の**列ベクトル（column vector）**と呼ぶ． □

例　**（列ベクトルの具体例）**　3 次の列ベクトル：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{22}$$

□

注意　**（ベクトルの呼び方と書き方）**　行ベクトル, 列ベクトルを総称して**ベクトル（vector）**と呼ぶ．ベクトルを表わす変数は太文字で書き，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ のように表記する． □

定義　**（零ベクトル）**　成分が全て 0 のベクトルを零ベクトルと呼び $\mathbf{0}$ と表わす． □

注意　**（1×1 行列）**　1×1 行列である $[a_{11}]$ は要素は一つしかないが，あくまでも行列であるので注意する．しかしまれに数として取り扱うこともあるので，更に注意が必要である．

□

例 **（行列の名称等）**　行列

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & 12 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

を考える．

(1)　行列 A の型は 3×5 型である．

(2)　$(2,1)$ 成分は $a_{21} = 3$ であり，$(3,4)$ 成分は $a_{34} = 7$ である．

(3)　第 2 行は

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 12 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{24}$$

であり，第 3 列は

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

である．

(4)　行列 A の転置行列 ${}^tA$ は

$${}^tA = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 6 & 12 & 0 \\ -4 & 0 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

である．　□

§ 1.4 クロネッカーのデルタ

定義（クロネッカーのデルタ）　記号 δ_{ij} を

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{27}$$

と定義する．これを**クロネッカーのデルタ（Kronecker's delta）**と呼ぶ．

□

例（クロネッカーのデルタの具体例）

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1 \tag{28}$$

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0 \tag{29}$$

□

例（クロネッカーのデルタの使用例）　単位行列は $E_n = [\delta_{ij}]_{n \times n}$ と表わされる．例えば

$$E_3 = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

となる．

□

例（クロネッカーのデルタの使用例）　行列 A が $A = [\delta_{i+1,j}]$ と与えられるとき，

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \\ \delta_{41} & \delta_{42} & \delta_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

となる．

□

§ 1.5　行列の演算

i) 行列の和と差

定義 **（行列の和と差）**　行列 A と行列 B の和を C とする．これを

$$A + B = C \tag{32}$$

と表記する．行列の和は型が

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}\,, \qquad B = [b_{ij}]_{m\times n}\,, \qquad C = [c_{ij}]_{m\times n} \tag{33}$$

のとき定義される．各成分は

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}]\,, \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{34}$$

と定義される．行列の差は同様に

$$A - B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}]\,, \qquad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \tag{35}$$

と定義される．

□

例 **（行列の和の計算例）**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & -2+5 & 8+1 \\ 2+3 & 5-1 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

□

ii) 行列のスカラー倍

定義（行列のスカラー倍）　α をスカラー（数）とする．行列 A のスカラー倍を

$$C = \alpha\, A \tag{37}$$

と表記する．行列のスカラー倍は型が

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}\,, \qquad C = [c_{ij}]_{m\times n} \tag{38}$$

のとき定義される．各成分は

$$C = \alpha\, A = \alpha[a_{ij}] = [c_{ij}]\,, \qquad c_{ij} = \alpha\, a_{ij} \tag{39}$$

と定義される．

□

例（スカラー倍の計算例）

$$3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 1 & 3\times(-2) & 3\times 8 \\ 3\times 2 & 3\times 5 & 3\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 24 \\ 6 & 15 & -3 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

□

例（スカラー倍の計算例）

$$\alpha\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha & 1\alpha \\ 4\alpha & 3\alpha \end{bmatrix}. \tag{41}$$

□

iii) 行列の積

定義（行列の積） 行列 A と行列 B の積を C とする．このとき

$$A\,B = C \tag{42}$$

と表記する．行列の積は型が

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}\,, \qquad B = [b_{ij}]_{n\times r}\,, \qquad C = [c_{ij}]_{m\times r} \tag{43}$$

のとき定義される．各成分は

$$AB = \left[\begin{array}{cccc} * & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c|cc} * & * & \cdots & b_{1j} & \cdots & * \\ * & * & \cdots & b_{2j} & \cdots & * \\ * & * & \cdots & b_{3j} & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & b_{nj} & \cdots & * \end{array}\right] = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & c_{ij} & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * & \cdots & * \end{bmatrix} = C\,, \tag{44}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{21}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \tag{45}$$

と定義される．

□

例（行列の積の計算例）

$$\underset{2\times 3\,\text{型}}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}} \underset{3\times 3\,\text{型}}{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}} \tag{46}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 3 + 1\times 2 + (-3)\times(-1) & 2\times 1 + 1\times 0 + (-3)\times 4 & 2\times 0 + 1\times(-1) + (-3)\times 1 \\ 1\times 3 + (-5)\times 2 + 2\times(-1) & 1\times 1 + (-5)\times 0 + 2\times 4 & 1\times 0 + (-5)\times(-1) + 2\times 1 \end{bmatrix} \tag{47}$$

$$= \underset{2\times 3\,\text{型}}{\begin{bmatrix} 11 & -10 & -4 \\ -9 & 9 & 7 \end{bmatrix}}. \tag{48}$$

□

例 **（行列の積の計算例）**

$$\underset{3\times 1\text{型}}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}} \underset{1\times 3\text{型}}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 3\text{型}}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}}. \tag{49}$$

$$\underset{1\times 3\text{型}}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1\text{型}}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}} = \underset{1\times 1\text{型}}{\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}}. \quad \text{←スカラーではないので注意} \tag{50}$$

□

例 **（行列の積の具体例）**

$$\underset{3\times 3\text{ 型}}{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & 6 \\ 8 & 7 & 3 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1\text{ 型}}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{3\times 1\text{ 型}}{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{3\times 1\text{ 型}}{\begin{bmatrix} x+4y+5z \\ 9x+2y+6z \\ 8x+7y+3z \end{bmatrix}} = \underset{3\times 1\text{ 型}}{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}} \tag{51}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underset{\text{連立一次方程式}}{\begin{cases} x+4y+5z = -1 \\ 9x+2y+6z = -2 \\ 8x+7y+3z = -3 \end{cases}} \tag{52}$$

□

§ 1.6 行列の演算に関する緒性質

定理 （行列の演算の性質） 行列の演算に関して次の性質が成り立つ：

(1) $A+B=B+A$ （加法の交換則）

(2) $A+O=A,\ O+A=A$ （加法の零元） O は数の足し算の 0 と同様な振る舞い

(3) $(A+B)+C=A+(B+C)$ （加法の結合則）

(4) $AE=A,\ EA=A$ （乗法の単位元） E は数の掛け算の 1 と同様な振る舞い

(5) $AO=O,\ OA=O$ （乗法の零元） O は数の掛け算の 0 と同様な振る舞い

(6) $(AB)C=A(BC)$ （乗法の結合則）

(7) $A(B+C)=AB+AC,\ (A+B)C=AC+BC$ （分配則）

(8) $0A=O,\ 1A=A$

(9) $(ab)A=a(bA),\ (aA)B=a(AB)$

(10) $a(A+B)=aA+aB,\ (a+b)A=aA+bA$

(11) ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$

(12) ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$

ただし，A,B,C の型は互いに演算が定義されている型とする． □

問 （行列の演算の性質） 性質 (1)-(12) を示せ．

（証明）(1), (4), (11), (12) を示す．残りは自習．

(1) $A+B=B+A$ を示す．まず $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ とおく．このとき $A+B$ は和の定義より

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} \tag{53}$$

となる．次に $B+A$ を求める．和の定義より

$$B+A=[b_{ij}+a_{ij}]_{m\times n} \tag{54}$$

となる．各要素 $b_{ij}+a_{ij}$ は単に数なので，和について可換である．よってすべての要素の和の順番を入れ換えて，

$$B+A=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} \tag{55}$$

となる．以上より $A+B=B+A$ が示された．

(4) $AE=A$ を示す．まず $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $E=[\delta_{ij}]_{n\times n}$ とおく．さらに $C=AE=[c_{ij}]_{m\times n}$ とおく．c_{ij} を計算する．積の定義とクロネッカーのデルタの定義に従って計算すると

$$
\begin{aligned}
c_{ij} = AE = [a_{ij}][\delta_{ij}] &= \sum_{k}^{n} a_{ik}\delta_{kj} && (56)\\
&= a_{i1}\delta_{1j} + a_{i2}\delta_{2j} + a_{i3}\delta_{3j} + \cdots + a_{ij}\delta_{jj} + \cdots + a_{in}\delta_{nj} && (57)\\
&= a_{i1}\times 0 + a_{i2}\times 0 + a_{i3}\times 0 + \cdots + a_{ij}\times 1 + \cdots + a_{in}\times 0 && (58)\\
&= a_{ij} && (59)
\end{aligned}
$$

を得る．これより $c_{ij}=a_{ij}$ が成り立つ．よって $C=A$ を得る．以上より $AE=A$ が示された．$EA=A$ の場合も同様に示す．

(11) ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$ を示す．まず，$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ とおく．和の定義より

$$
A+B=[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} \tag{60}
$$

となる．転置の操作は行と列を入れ換えるので

$$
{}^t(A+B)={}^t([a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n})=[a_{ji}+b_{ji}]_{n\times m} \tag{61}
$$

となる．右辺の行列を二つの行列の和に分解し，それぞれの行列の転置をとると

$$
{}^t(A+B)=[a_{ji}]_{n\times m}+[b_{ji}]_{n\times m}={}^t([a_{ij}]_{m\times n})+{}^t([b_{ij}]_{m\times n})={}^tA+{}^tB \tag{62}
$$

を得る．以上で示された．

(12) ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$ を示す．まず

$$
A=[a_{ij}]_{m\times n}\,,\quad B=[b_{ij}]_{n\times r}\,,\quad {}^tA=[\tilde{a}_{ij}]_{n\times m}\,,\quad {}^tB=[\tilde{b}_{ij}]_{r\times n} \tag{63}
$$

とおく．次に

$$
C=AB=[c_{ij}]_{m\times r}\,,\quad {}^tC={}^t(AB)=[\tilde{c}_{ij}]_{r\times m}\,,\quad D={}^tB\,{}^tA=[d_{ij}]_{r\times m} \tag{64}
$$

とおく．まず c_{ij}, d_{ij} を求める．積の定義より

$$
c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\,,\quad d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\tilde{b}_{ik}\tilde{a}_{kj} \tag{65}
$$

となる．$\tilde{c}_{ij}=c_{ji}$, $\tilde{a}_{ij}=a_{ji}$, $\tilde{b}_{ij}=b_{ji}$ を用いれば

$$
\tilde{c}_{ij}=c_{ji}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{n}\tilde{b}_{ik}\tilde{a}_{kj}=d_{ij} \tag{66}
$$

を得る．以上より ${}^t(AB)={}^tC=[\tilde{c}_{ij}]_{r\times m}=[d_{ij}]_{r\times n}=D={}^tB\,{}^tA$ となる．証明終了． □

§ 1.7 行列の演算に関する注意

注意（積の可換性） $AB = BA$ は常に成立するとは限らない． □

定義（積の可換性） $AB = BA$ が成立するとき，A と B は**可換（commutative）**であるという．可換でない場合は**非可換（non-commutative）**であるという． □

問（積の可換性） 可換となりうる行列は正方行列のみである．これを示せ． □

例（非可換な場合の具体例） 行列 A, B が

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{67}$$

で与えられたとする．このとき

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{68}$$

となる．よって $AB \neq BA$ となり，A と B とは非可換である． □

例（可換な場合の具体例） 行列 A, B が

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{69}$$

で与えられたとする．このとき

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \tag{70}$$

となる．よって $AB = BA$ となり，A と B とは可換である． □

問（対角行列の可換性） 対角行列どうしの積は可換である．これを示せ．

（証明）対角行列は $A = [a_{ij}\delta_{ij}], B = [b_{ij}\delta_{ij}]$ と表わされる．これを用いて示す． □

注意 **（行列の方程式）** $AB = O$ のとき $A = O$ または $B = O$ が成立するとは限らない．数の場合は $ab = 0$ のとき $a = 0$ または $b = 0$ である．

□

例 **（行列の方程式の具体例）** 行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{71}$$

とする．このとき

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O \tag{72}$$

となる．$AB = O$ ではあるが $A \neq O, B \neq O$ である．

□

定義 **（行列の巾乗）** A が正方行列のとき，A を m 回掛け合わせた行列を

$$A^m = \overbrace{AA \cdots A}^{m} \tag{73}$$

と表記し，これを A の**巾乗**と呼ぶ．

□

定義 **（巾零行列）** $A^m = O$ $(2 \leq m \in \mathbb{N})$ を満たす行列 A を**巾零行列**と呼ぶ．

□

例 **（巾零行列の具体例）**

(1) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O\,. \tag{74}$$

(2) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O\,, \quad A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O\,. \tag{75}$$

□

問 教科書（p.10）問題 1.2.

□

§ 1.8 行列の分割

$m \times n$ 型行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{76}$$

の n 個の列を t 個の領域に分割し，m 個の列を s 個の領域に分割する．縦横で分割された部分領域はそれぞれまた行列となっている．この部分行列をブロック行列と呼び，A_{ij} と表す．A_{ij} を用いて行列 A を書き直すと

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, \tag{77}$$

$$A_{ij} = [a_{kl}]_{m_i \times n_j}, \tag{78}$$

$$\sum_{p=1}^{i-1} m_p + 1 \leq k \leq \sum_{p=1}^{i} m_p, \tag{79}$$

$$\sum_{p=1}^{j-1} n_p + 1 \leq l \leq \sum_{p=1}^{j} n_p, \tag{80}$$

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_s = m, \quad m_i \geq 1, \tag{81}$$

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n, \quad n_j \geq 1, \tag{82}$$

$$i = 1, 2, \cdots, s, \tag{83}$$

$$j = 1, 2, \cdots, t \tag{84}$$

と表される．

例 **（行列の分割の具体例）**

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \hline 5 & 3 & -9 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{85}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} -9 \end{bmatrix} \tag{86}$$

□

§ 1.9 分割された行列の積

定理 **（分割された行列の積）** 行列 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times r}$ を分割し，

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1u} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tu} \end{bmatrix}, \tag{87}$$

$$A_{ij} = [a_{kl}]_{m_i\times n_j} \quad (i = 1, 2, \cdots, s;\ j = 1, 2, \cdots, t)\,, \tag{88}$$

$$B_{ij} = [b_{kl}]_{n_i\times r_j} \quad (i = 1, 2, \cdots, t;\ j = 1, 2, \cdots, u)\,, \tag{89}$$

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_s = m\,, \quad m_i \geq 1\,, \tag{90}$$

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n\,, \quad n_j \geq 1\,, \tag{91}$$

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_u = r\,, \quad r_j \geq 1 \tag{92}$$

と表したとき，行列の積 AB は

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1u} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{su} \end{bmatrix}, \tag{93}$$

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{it}B_{tj} = \sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj} \tag{94}$$

と与えられる． □

問 これを示せ． □

例 **（分割された行列の積の具体例）**　行列

$$A = \left[\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ \hline 1 & -2 \\ \hline -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{array}\right] \tag{95}$$

の積 $AB = C$ を考える．このとき行列を分割し

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} \tag{96}$$

とする．C の部分行列は

$$\begin{aligned}
C_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} && (97) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} && (98) \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} && (99) \\
C_{21} &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} && (100) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} && (101) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} && (102)
\end{aligned}$$

となるので，結局積として

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{103}$$

を得る．

□

例 **（分割された行列の積の計算例）**

$$\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & O \\ O & A_2B_2 \end{bmatrix}. \tag{104}$$

（証明）

$$（左辺）= \begin{bmatrix} A_1B_1 + OO & A_1O + OB_2 \\ OB_2 + A_2O & OO + A_2B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & O \\ O & A_2B_2 \end{bmatrix} =（右辺）. \tag{105}$$

□

例 **（分割された行列の積の計算例）** 行列の積

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \tag{106}$$

を考える．これは

$$\left[\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline O & B \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} C & E \\ \hline O & D \end{array}\right] \tag{107}$$

という形をしている．よって積は

$$\left[\begin{array}{c|c} AC & A+D \\ \hline O & BD \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \hline O & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\right] \tag{108}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{109}$$

と求まる． □

§ 1.10 行列のベクトルへの分割

$\boxed{\text{例}}$ **（行列を列ベクトル，行ベクトルへ分割）** 行列を分割し列ベクトルと行ベクトルでそれぞれ表す．行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \tag{110}$$

を考える．行列を一列ずつ縦に分割し，

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{bmatrix} \tag{111}$$

と表わす．ただし，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{：} 3 \times 1 \text{ 型行列（3 次の列ベクトル）} \tag{112}$$

とおく．行列を一行ずつ分割し，

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} \tag{113}$$

と表わす．ただし，

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \tag{114}$$

$$\text{：} 1 \times 3 \text{ 型行列（3 次の行ベクトル）}$$

とおく．

□

例 **（行列をベクトルに分割したときの積の表現）** 行列の積をベクトルを用いて表現する．行列 A と行列 B の積 AB を考える．行列 A は

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \text{：行ベクトル} \tag{115}$$

のように行ベクトルに分割する．行列 B は

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_r \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \text{：列ベクトル} \tag{116}$$

のように列ベクトルに分割する．このとき積 AB は

$$AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_r \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_r \end{bmatrix} \tag{117}$$

$$= \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 & \cdots & A\boldsymbol{b}_r \end{bmatrix} \tag{118}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 B \\ \boldsymbol{a}_2 B \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m B \end{bmatrix} \tag{119}$$

と表わされる． □

問 教科書（p.14）問題 1.3. □

2 連立一次方程式

§ 2.1 連立一次方程式の行列表現

連立一次方程式

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 7 \\ x & - & 4y & = & 9 \end{array}\right. \tag{120}$$

を考える．行列を用いて書き直すと等価な方程式として

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} \tag{121}$$

を得る．一般に変数 n 個，方程式 m 本の連立一次方程式は

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{122}$$

と表される．これを行列で書き直すと，

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{123}$$

となる．行列をそれぞれ文字で置き換えて

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad A = [a_{ij}]_{m\times n}, \qquad \boldsymbol{x} = [x_j]_{n\times 1}, \qquad \boldsymbol{b} = [b_i]_{m\times 1} \tag{124}$$

と表される．行列により表現された方程式と元の連立一次方程式は等価な方程式である．

定義（係数行列）　連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の係数をまとめた行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{125}$$

を**係数行列（coefficient matrix）**と呼ぶ．行列 A と $\boldsymbol{b}$ を部分行列としてまとめた行列

$$[A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{126}$$

のことを**拡大係数行列（enlarged coefficient matrix）**と呼ぶ． □

例（連立一次方程式の行列表現の具体例）　連立一次方程式

$$\begin{cases} 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = 7 \\ x_1 & & -3x_3 & +x_4 & = 5 \\ 2x_1 & -x_2 & +9x_3 & & = 0 \end{cases} \tag{127}$$

の係数行列と拡大係数行列は

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [A|\boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{128}$$

である．行列を用いて方程式を書き直すと

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{129}$$

と表される． □

問　教科書（p.18）問題 1.4　1.–2. □

§ 2.2 ベクトルの一次結合と連立一次方程式

定義（ベクトルの一次結合） m 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が与えられたとき，ベクトル

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m \tag{130}$$

を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ の**一次結合（linear combination）**と呼ぶ． □

例（ベクトルの一次結合の具体例） 2 次の列ベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の一次結合で表すと

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{131}$$

となる． □

連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の係数行列 A を列ベクトルで分割し $A = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$ と書き直すと，方程式は

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b} \tag{132}$$

となる．すなわち $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m$ となる．これはベクトル $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の一次結合で表したものに他ならない．連立一次方程式は一次結合の係数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を求める問題と等価である．

例（ベクトルの一次結合と連立一次方程式の関係の具体例） $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ の一次結合で表す．すなわち

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{133}$$

を満たす係数 x_1, x_2 を求める．これを書き直すと

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{134}$$

となる．結局，連立一次方程式を求める問題に帰着する．これを解くと $x_1 = 3/4$, $x_2 = -1/4$ となる．よって

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{3}{4}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{135}$$

を得る． □

問 教科書（p.18） 問題 1.4 3.–6. □

§ 2.3　連立一次方程式の基本変形

$\boxed{\textbf{定義}}$ **（連立一次方程式の基本変形）**　連立一次方程式に対する次のの操作を**連立一次方程式の基本変形**と呼ぶ.

(1) 一つの式を α 倍する.

(2) 二つの式を入れ替える.

(3) 一つの式を α 倍して別の行に加える.

□

連立一次方程式に基本変形をして得られた方程式と元の方程式とは等価な方程式である．すなわち両者は同じ解をもつ.

連立一次方程式とその行列表現は，方程式としては等価なものである．連立一次方程式の基本変形は，行列表現では次の行列の行の基本変形となる.

$\boxed{\textbf{定義}}$ **（行列の行の基本変形）**　行列に対する次の操作を**行列の行の基本変形（matrix elementary row transformation）**と呼ぶ.

(1) 一つの行を α 倍する.

(2) 二つの行を入れ替える.

(3) 一つの行を α 倍して別の行に加える.

□

$\boxed{\textbf{定理}}$ **（掃き出し法）**　拡大係数行列 $[A|\boldsymbol{b}]$ に基本変形を繰り返し行ない,

$$[A|\boldsymbol{b}] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & \text{\Large 0} & \tilde{b}_1 \\ & 1 & & & \tilde{b}_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ \text{\Large 0} & & & 1 & \tilde{b}_m \end{array}\right] \tag{136}$$

の形に変形ができたとする．このとき解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{bmatrix} \tag{137}$$

と得られる．この解法を**掃き出し法（sweeping-out method）**または**ガウスの消去法（Gaussian elimination）**と呼ぶ.

□

$\boxed{\text{例}}$ **（掃き出し法による計算例）**　連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \tag{138}$$

を考える．基本変形を繰り返し行なう．連立方程式とその拡大係数行列

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \tag{139}$$

に基本変形をほどこす．第二式を -2 倍し第一式に加えると

$$\begin{cases} -y = -2 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \tag{140}$$

を得る．第一式と第二式を入れ換えて

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -y = -2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \tag{141}$$

となる．第二式を 2 倍し第一式に加えると

$$\begin{cases} x = 1 \\ -y = -2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \tag{142}$$

となる．第二式を -1 倍すると

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \tag{143}$$

を得る．結局拡大係数行列は

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \tag{144}$$

と変形された．以上より，解は $(x, y) = (1, 2)$ と求まる． □

$\boxed{\textbf{例}}$ **（掃き出し法による計算例）**　連立一次方程式

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 3y & - & z & = -3 \\ -x & + & 2y & + & 2z & = 1 \\ x & + & y & - & z & = -2 \end{array}\right. \tag{145}$$

を考える．拡大係数行列に基本変形を繰り返し行ない，

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \tag{146}$$

を得る．以上より，解は $(x, y, z) = (1, -1, 2)$ と求まる．

□

$\boxed{\textbf{例}}$ **（掃き出し法による計算例）**　連立一次方程式

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & - & z & = 1 \\ 2x & + & y & + & 3z & = 4 \\ -x & + & 2y & - & 4z & = -2 \end{array}\right. \tag{147}$$

を考える．拡大係数行列に基本変形を繰り返し行ない，

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \tag{148}$$

を得る．以上より，解は $(x, y, z) = (1, 1/2, 1/2)$ と求まる．　□

$\boxed{\textbf{問}}$　教科書（p.22）問題 2.1.　□

§ 2.4 行列の簡約化

基本変形により連立一次方程式が

$$
\begin{cases} x \qquad\qquad = 1 \\ \qquad y \quad + z \ = 2 \end{cases} \tag{149}
$$

のように変形される場合は掃き出し法では解が得られない．このような場合は次の行列の簡約化により解を求める．

定義（簡約な行列）　行列が

$$
\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & \ast\ast & 0 & \ast\ast & 0 & \ast\ast & 0 & \ast\ast \\
 & & 1 & \ast\ast & 0 & \ast\ast & 0 & \ast\ast \\
 & & & & 1 & \ast\ast & 0 & \ast\ast \\
\text{\Large 0} & & & & & & 1 & \ast\ast \\
\hline
0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & \cdots & 0
\end{array}\right] \tag{150}
$$

という形をしているとき，この行列を**簡約な行列**と呼ぶ．基本変形により行列を簡約な行列に変換することを**簡約化**と呼ぶ．また，各行の一番左の 0 ではない成分を**主成分**と呼ぶ． □

例（簡約な行列の具体例）　次の行列は簡約な行列である：

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{151}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{152}
$$

□

例　例題 2.2.1 □

$\boxed{\textbf{定理}}$ **（簡約化の一意性）**　任意の行列は基本変形により一意に簡約化できる. $\square$

$\boxed{\textbf{例}}$ **（簡約化の計算例）** $\square$

定義（行列の階数）　行列 A を簡約化した行列を B とする．このとき行列 A に対する**行列の階数**（**rank**）を

$$\mathrm{rank}\,(A) = B \text{ の零ベクトルではない行の個数} \tag{153}$$

と定義する.

□

例（階数の具体例）

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{rank}\,(A) = 2\,. \tag{154}$$

□

例（階数の具体例）

□

定理（階数に関する定理）　行列 A が $m \times n$ 型のとき,

$$\mathrm{rank}\,(A) \leq m\,, \qquad \mathrm{rank}\,(A) \leq n \tag{155}$$

が成り立つ.

□

問　これを示せ.

□

問　教科書（p.27）問題 2.2.

□

§ 2.5　連立一次方程式の解法

連立一次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,, \qquad A = [a_{ij}]_{m\times n}\,, \quad \boldsymbol{b} = [b_i]_{m\times 1}\,, \quad \boldsymbol{x} = [x_j]_{n\times 1} \tag{156}$$

を考える．以後この方程式に対して議論する．

方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めるにはまず，拡大係数行列 $[A|\boldsymbol{b}]$ の簡約化を行なう．このとき得られた行列が

$$[A|\boldsymbol{b}]\ \text{の簡約化行列} = \left[\begin{array}{cccccccc|c}
1 & ** & 0 & ** & 0 & ** & 0 & ** & 0 \\
 & & 1 & ** & 0 & ** & 0 & ** & 0 \\
 & & & & 1 & ** & 0 & ** & 0 \\
\text{\Large 0} & & & & & & 1 & ** & 0 \\ \hline
0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & 1 \\ \hline
0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right] \tag{157}$$

と得られたとしよう．このとき零ベクトルではない一番下の行に着目すると

$$0 \times x_1 + 0 \times x_2 + 0 \times x_3 + \cdots + 0 \times x_n = 1 \tag{158}$$

となる．$0 = 1$ となり矛盾する．よってこのとき，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解をもたない．行列のランクに着目すると $\operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}([A|\boldsymbol{b}])$ が成り立つ．この条件のもとでは解をもたない．次に簡約化の結果，

$$[A|\boldsymbol{b}]\ \text{の簡約化行列} = \left[\begin{array}{cccccccc|c}
1 & ** & 0 & ** & 0 & ** & 0 & ** & * \\
 & & 1 & ** & 0 & ** & 0 & ** & * \\
 & & & & 1 & ** & 0 & ** & * \\
\text{\Large 0} & & & & & & 1 & ** & * \\ \hline
0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & 0 \\ \hline
0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & & & & & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right] \tag{159}$$

を得たとする．ことときは解をもつ．ランクは $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A|\boldsymbol{b}])$ が成り立つ．以上をまとめると次の定理が成り立つ．

定理 **（連立一次方程式の可解条件）**　方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつための必要十分条件は

$$\operatorname{rank}([A|\boldsymbol{b}]) = \operatorname{rank}(A) \tag{160}$$

である． □

$\boxed{\textbf{例}}$ **（解をもたない例）**　方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{161}$$

を考える．拡大係数行列の簡約化を行なうと，

$$[A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{162}$$

を得る．$\operatorname{rank}(A) = 3 \neq \operatorname{rank}([A|\boldsymbol{b}]) = 4$ となる．よって解をもたない． □

$\boxed{\text{例}}$ **（任意定数を含む解の具体例）**　方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{163}$$

を考える．拡大係数行列の簡約化を行なうと，

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{164}$$

を得る．簡約化された拡大係数行列より方程式を復元すると，

$$\begin{cases} x_1 \quad -2x_2 \qquad +3x_4 \qquad = 2 \\ \qquad\qquad x_3 \quad -x_4 \qquad = -1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_5 \quad = 1 \end{cases} \tag{165}$$

である．主成分の列と同じ位置にある変数を左辺に残し，他の項を右辺に移項すると

$$\begin{cases} x_1 &= 2 + 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 &= -1 + x_4 \\ x_5 &= 1 \end{cases} \tag{166}$$

となる．右辺にある変数 x_2, x_4 は独立に任意の値をとる．よって $x_2 = c_1$, $x_4 = c_2$ とおけば，解として

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2c_1 - 3c_2 \\ c_1 \\ -1 + c_2 \\ c_2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (c_1, c_2 \text{ ：任意定数}) \tag{167}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{168}$$

を得る．解は 5 次元平面 $\mathbb{R}^5$ 内のある 2 次元平面となる．　□

解に任意定数を含まないのは，簡約行列のすべての列に主成分が現れるときである．つまり係数行列のランクと変数の個数が一致するときである．これをまとめると以下の定理を得る．

定理 **（一意な解をもつ条件）**　方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が唯一つの解をもつための必用十分条件は

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A|\boldsymbol{b}]) = n \tag{169}$$

である． □

定理 **（任意定数を含む解をもつ条件）**　方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad A = [a_{ij}]_{m\times n}, \quad \boldsymbol{x} = [x_j]_{n\times 1}, \quad \boldsymbol{b} = [b_i]_{m\times 1} \tag{170}$$

は

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}] < n \tag{171}$$

のとき任意定数を含む解をもつ．このとき任意定数の個数は

$$n - \operatorname{rank}(A) \tag{172}$$

である． □

定義（**同次形方程式**）　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において $\boldsymbol{b} = 0$ が成り立つとき，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は**同次形**（**homogeneous**）と呼ぶ．$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ とき**非同次形**（**inhomogeneous**）と呼ぶ． □

定理　同次方程式は $\mathrm{rank}\,(A) = \mathrm{rank}\,[A|\boldsymbol{0}]$ が常になり立つので，常に解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ をもつ． □

定義　同次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を**自明な解**と呼ぶ． □

定理（**同次方程式の解**）　同次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について次の条件が成り立つ：

(1) 自明な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ をもつための必用十分条件は

$$\mathrm{rank}\,(A) = n \tag{173}$$

である．

(2) $m < n$ のとき，方程式は自明でない解（任意定数を含む解）をもつ．

（証明）(1) 前述の定理より唯一つの解をもつための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\,(A) = \mathrm{rank}\,([A|\boldsymbol{0}]) = n \tag{174}$$

である．拡大係数行列の一番右の列の $\boldsymbol{0}$ はランクに影響を与えない．よって定理の条件を得る．
(2) $\mathrm{rank}\,(A) \leq m$, $\mathrm{rank}\,(A) \leq n$ と条件 $m < n$ より

$$\mathrm{rank}\,(A) \leq m < n \tag{175}$$

を得る．(1) の定理より自明でない解をもつ．証明終了． □

$\boxed{\textbf{例}}$ **（同次形方程式の解）**　方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{176}$$

を考える．係数行列を簡約化して

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{177}$$

を得る．よって解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2c_1 - c_2 \\ -c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (\forall c_1, \forall c_2 \in \mathbb{R}) \tag{178}$$

となる．解は原点を通る 2 次元平面である．

□

§ 2.6 ちょっとまとめ

$\boxed{?}$ **（任意定数を含む解って何？）**　方程式 $x_1 + x_2 = 0$ の解を考えよう．この方程式の解はどのように表現したらよいだろうか．まずは具体的にいくつか解を書き下してみよう．解は方程式に代入して成り立てばよいから，

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = -1\,, \tag{179}$$
$$x_1 = 2\,, \quad x_2 = -2\,, \tag{180}$$
$$x_1 = 3\,, \quad x_2 = -3\,, \tag{181}$$
$$x_1 = 4\,, \quad x_2 = -4\,, \tag{182}$$
$$\vdots \tag{183}$$

は解となるのがすぐ分かる．この解から x_1 は任意の値で良さそうである．これを c としよう．$x_1 = c$ とおけば $c_2 = -c$ である．よって解として

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix} \qquad (\forall c \in \mathbb{R}) \tag{184}$$

を得る．確にこれが解となっているかは，方程式 $x_1 + c_2 = 0$ に代入すればよい．この解は任意定数を含む解である．変数の個数は 2 個であり，方程式の本数が 1 本であるので，任意定数の個数は $2 - 1 = 1$ 個となる．

次に方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \tag{185}$$

を考えよう．第一式は先ほどの方程式と同じである．であるから第一式を満たす解として $(x_1, x_2) = (c, -c)$ を得る．第二式も第一式と同じ形をしており，変数名が違うだけである．よって解は $(x_3, x_4) = (c, -c)$ である．しかし第一式と第二式とは独立しているので，任意定数も独立してとりうる．これを $x_1 = c_1$, $x_3 = c_2$ としよう．よって解として

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_1 \\ c_2 \\ -c_2 \end{bmatrix} \qquad (\forall c_1, \forall c_2 \in \mathbb{R}) \tag{186}$$

を得る．変数が 4 個，方程式が 2 本，任意定数が $4 - 2 = 2$ 個である．　□

$\boxed{?}$ **(簡約化って何？)**　方程式

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \\ & & x_3 & +x_4 & =0 \end{cases} \tag{187}$$

を考えよう．第一式から第二式を引くと，

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & & =0 \\ & & x_3 & +x_4 & =0 \end{cases} \tag{188}$$

を得る．第一式から変数が 2 個減っている．このとき係数行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{189}$$

のように変形される．右の行列は簡約な行列となっている．

次に方程式

$$\begin{cases} 3x_1 & +4x_2 & =2 \\ x_1 & +2x_2 & =3 \end{cases} \tag{190}$$

を考えよう．方程式と係数行列の変化をみよう：

$$\begin{cases} 3x_1 & +4x_2 & =2 \\ x_1 & +2x_2 & =3 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \tag{191}$$

$$\to \begin{cases} 0 & -2x_2 & =-7 \\ x_1 & +2x_2 & =3 \end{cases} \qquad \to \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \tag{192}$$

$$\to \begin{cases} x_1 & +2x_2 & =3 \\ & -2x_2 & =-7 \end{cases} \qquad \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -7 \end{array}\right] \tag{193}$$

$$\to \begin{cases} x_1 & 0 & =-4 \\ & -2x_2 & =-7 \end{cases} \qquad \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -7 \end{array}\right] \tag{194}$$

$$\to \begin{cases} x_1 & & =-4 \\ & x_2 & =7/2 \end{cases} \qquad \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 7/2 \end{array}\right] \tag{195}$$

このように基本変形により変数が減って行く．この手順によりうまく変数を減らすことができる．ある行列が与えられたとき，その行列に対して簡約な行列は一意に定まる．つまり与えられた方程式に対して常にうまい変数の減らし方が存在することを意味する．　□

$\boxed{?}$ **（ランクっ何？）** 方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \tag{196}$$

を考えよう．変数が 4 個，方程式が 3 本であるから任意定数は $4-3=1$ 個であろう．しかし本当にそうであろうか．まずは方程式に基本変形をほどこしてみよう：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \tag{197}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases} \tag{198}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \tag{199}$$

このように方程式は本質的に 2 本である．よって変数が 2 個，方程式が 2 本，任意定数が $4-2=2$ 個となる．これを係数行列でみてみよう：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{200}$$

最後の簡約化された行列に着目する．行列のランクは 2 である．つまり係数行列のランクは，方程式は本質的には何本であるかを示している．

□

まとめ（連立一次方程式についてのまとめ）　連立一次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad A = [a_{ij}]_{m\times n}, \quad \boldsymbol{b} = [b_i]_{m\times 1}, \quad \boldsymbol{x} = [x_j]_{n\times 1} \tag{201}$$

について次の関係が成り立つ：
(I) 非同次形（$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$）のとき

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{rank}\,(A) \neq \mathrm{rank}\,([A|\boldsymbol{b}]) & \Leftrightarrow & \text{解なし} \\ \mathrm{rank}\,(A) = \mathrm{rank}\,([A|\boldsymbol{b}]) = n & \Leftrightarrow & \text{一意な解をもつ} \\ \mathrm{rank}\,(A) = \mathrm{rank}\,([A|\boldsymbol{b}]) < n & \Leftrightarrow & \text{任意定数を含む解をもつ} \\ & & \text{任意定数の個数} = n - \mathrm{rank}\,(A) \end{array}$$

(II) 同次形（$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$）のとき

$$\begin{array}{rlcl} \text{常に} & \mathrm{rank}\,(A) = \mathrm{rank}\,([A|\boldsymbol{0}]) & \text{が成り立つので} & \text{解を常にもつ} \\ & \mathrm{rank}\,(A) = n & \Leftrightarrow & \text{自明な解（}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\text{）をもつ} \\ m < n \Rightarrow & \mathrm{rank}\,(A) < n & \Leftrightarrow & \text{任意定数を含む解をもつ} \\ & & & \text{任意定数の個数} = n - \mathrm{rank}\,(A) \end{array}$$

□

§ 2.7 行列の基本変形

定理（行列の積による行列の行の基本変形） 行列 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ が与えられたとき，次に定義される行列 $P^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, 3)$ を左から掛けて，積 $P^{(\nu)}A$ を考える．このとき $P^{(\nu)}A$ は行列の行の第 ν 基本変形を A にほどこした行列と等しい．

(1) 第 k 行を α 倍する．

$$
P_k^{(1)}(\alpha) = \begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\ \hline
& & & \alpha & & & \\ \hline
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & & k & & & \end{array} &
\end{array}
\tag{202}
$$

(2) 第 k 行と第 l 行を入れ替える．

$$
P_{k,l}^{(2)} = \begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\ \hline
& & & 0 & & & & 1 & & & \\ \hline
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\ \hline
& & & 1 & & & & 0 & & & \\ \hline
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{array}\right] \\
\begin{array}{ccccccccccc} & & & k & & & & l & & & \end{array}
\end{array}
\tag{203}
$$

(3) 第 l 行を α 倍して第 k 行に加える.

$$P^{(3)}_{k,l}(\alpha) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ \hline & & & 1 & & & & \alpha & & & \\ \hline & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ \hline & & & & & & & 1 & & & \\ \hline & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccccccccc} & & & {\scriptstyle k} & & & & {\scriptstyle l} & & & \end{array} \end{array} \quad (k < l) \tag{204}$$

$$P^{(3)}_{k,l}(\alpha) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ \hline & & & 1 & & & & & & & \\ \hline & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ \hline & & & \alpha & & & & 1 & & & \\ \hline & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccccccccc} & & & {\scriptstyle l} & & & & {\scriptstyle k} & & & \end{array} \end{array} \quad (l < k) \tag{205}$$

□

問 これを示せ. □

$\boxed{\text{例}}$ **（行列の行の基本変形の具体例）**　行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \tag{206}$$

を考える．このとき A にいろいろな基本変形を行なうと次のようになる．

$$P_1^{(1)}(\alpha)A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha & 3\alpha \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}. \quad \leftarrow \text{第 1 行を } \alpha \text{ 倍} \tag{207}$$

$$P_2^{(1)}(\alpha)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4\alpha & 5\alpha & 6\alpha \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}. \quad \leftarrow \text{第 2 行を } \alpha \text{ 倍} \tag{208}$$

$$P_3^{(1)}(\alpha)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7\alpha & 8\alpha & 9\alpha \end{bmatrix}. \quad \leftarrow \text{第 3 行を } \alpha \text{ 倍} \tag{209}$$

$$P_{1,2}^{(2)}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}. \quad \leftarrow \text{第 1 行と第 2 行を入れ換え} \tag{210}$$

$$P_{1,3}^{(2)}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \quad \leftarrow \text{第 1 行と第 3 行を入れ換え} \tag{211}$$

$$P_{2,3}^{(2)}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}. \quad \leftarrow \text{第 2 行と第 3 行を入れ換え} \tag{212}$$

$$P_{1,2}^{(3)}(\alpha)A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4\alpha & 2+5\alpha & 3+6\alpha \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}. \tag{213}$$

$$\leftarrow \text{第 2 行を } \alpha \text{ 倍し第 1 に加える} \tag{214}$$

$$P_{3,2}^{(3)}(\alpha)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7+4\alpha & 8+5\alpha & 9+6\alpha \end{bmatrix}. \tag{215}$$

$$\leftarrow \text{第 2 行を } \alpha \text{ 倍し第 3 に加える} \tag{216}$$

$$P_{2,1}^{(3)}(\alpha)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+\alpha & 5+2\alpha & 6+3\alpha \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}. \tag{217}$$

$$\leftarrow \text{第 1 行を } \alpha \text{ 倍し第 2 に加える} \tag{218}$$

□

$\boxed{\textbf{例}}$ **（上三角化，対角化）**　行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{219}$$

に左から行列 P をかけて上三角行列

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{220}$$

に変換する．すなわち $U = PA$ をみたす行列 P を求める．次に A に左から行列 Q をかけて単位行列

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{221}$$

に変換する．すなわち $E = QA$ をみたす行列 Q を求める．

まず P を求める．A に左から行列 A^{ν} $(\nu = 1, 2, 3)$ をかけて基本変形を行なう．

$$PA = U\,, \qquad P = P^{(*)}P^{(*)}P^{(*)} \cdots P^{(*)}E \tag{222}$$

$$QA = E\,, \qquad Q = P^{(*)}P^{(*)}P^{(*)} \cdots P^{(*)}E \tag{223}$$

□

$\boxed{\textbf{問}}$ **（下三角化）**　行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{224}$$

に左から P をかけて下三角行列

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \tag{225}$$

に変換せよ．すなわち $L = PA$ を満たす行列 P を求めよ．　□

§ 2.8 逆行列

定義（逆行列）　行列 A に対して

$$AB = BA = E \tag{226}$$

を満たす行列 B が存在するとき，行列 B を行列 A の**逆行列（inverse matrix）**と呼ぶ．A の逆行列は A^{-1} と表記する．
□

問　逆行列をもつのは正方行列のみである．これを示せ．

（証明）$AB = BA$ を満たす行列は可換な行列である．可換な行列は正方行列のみである．
□

定理（逆行列の一意性）　行列 A が逆行列をもつとき，逆行列は一意に定まる．

（証明）B と C が A の逆行列であると仮定する．このとき $AB = BA = E$, $AC = CA = E$ が成り立つ．これを用いて

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C \tag{227}$$

となる．よって $B = C$ であり B と C とは一致する．
□

定義（行列の正則性）　正方行列 A が逆行列をもつとき，A は**正則（regular）**であるという．正則な行列を**正則行列（regular matrix）**と呼ぶ．
□

定理（逆行列をもつ十分条件）　正方行列 A, B が $AB = E$ または $BA = E$ のどちらか一方だけを満たすときでも B は A の逆行列となる．

（証明）証明はずっとあとに行なう．
□

定理（逆行列の計算法）　行列 $[A|E]$ を簡約化して $[E|B]$ の形に変形できたとする．このとき B は A の逆行列 A^{-1} となる．

（証明）行列 A に基本変形を繰り返し行ない単位行列 E に変換されたとする．このとき

$$P^{(*)}P^{(*)}\cdots P^{(*)}A = E \tag{228}$$

と書ける．A の左にかかっている行列をまとめて B と書くと，

$$B = P^{(*)}P^{(*)}\cdots P^{(*)} \tag{229}$$

となる．この B を用いれば $BA = E$ が成り立つ．前述の定理より $BA = E$ のとき B は A の逆行列 $B = A^{-1}$ となる．よって行列 B を求めればよい．B は

$$B = P^{(*)}P^{(*)}\cdots P^{(*)}E \tag{230}$$

と書ける．これはすなわち A に行なった基本変形と同じ操作を E に対して行なうことを意味する．これらの操作を同時に行なうには，行列 $[A|E]$ を考えて $[E|B]$ の形に簡約化すればよい．この一連の操作により $BA = E$ を得る．
□

例（逆行列の計算例）

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{231}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{232}$$

□

定理（行列の正則性と緒性質）　正方行列 A に対して次の (1)-(5) は同値である：

(1) $\mathrm{rank}\,(A) = n$.

(2) A の簡約化は E である．

(3) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は任意の $\boldsymbol{b}$ に対して唯一つの解をもつ．

(4) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみをもつ．

(5) A は正則である．

□

定理　正方行列 A が正則なとき方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ をもつ．□

例 **（逆行列をもたない具体例）**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{233}$$

$\operatorname{rank}(A) = 2 < 3$ となるので A は正則ではない．よって A は逆行列をもたない． □

例 **（逆行列を用いた解法の具体例）**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{234}$$

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ とすると $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ より解が求まる．

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{235}$$

□

定理 **（逆行列の性質）**　正方行列 A, B が正則のとき次の関係式が成り立つ．

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

□

問　これを示せ．

（証明）(3) を示す． □

3 行列式

§ 3.1 置換

定義 **（文字の置換）**　n 個の文字 $\{1, 2, \cdots, n\}$ から自分自身 $\{1, 2, \cdots, n\}$ への 1 対 1 の写像を n 文字の**置換（permutation）**という．n 文字の置換 σ が写像

$$1 \to k_1\,, \quad 2 \to k_2\,, \quad \cdots n \to k_n \tag{236}$$

のとき σ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \tag{237}$$

と表わす．写像 $j \to k_j$ を $\sigma(j) = k_j$ と表わす．

□

例 **（置換の具体例）**

□

例 **（置換の表記）**

□

定義 **（置換の積）**　置換 σ, τ の積 $\sigma\tau$ を

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_{l_1} & k_{l_2} & \cdots & k_{l_n} \end{pmatrix} \tag{238}$$

または

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{239}$$

と定義する. □

例 **（置換の積の具体例）** □

注意 **（置換の積は非可換）**　一般的に $\sigma\tau = \tau\sigma$ は成立しない. □

定義 **（単位置換）**　全ての文字を動かさない置換

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \tag{240}$$

を**単位置換**と呼ぶ. □

定義 **（逆置換）**　置換 σ に対して

$$\sigma\tau = \tau\sigma = \epsilon \tag{241}$$

を満たす置換 τ を σ の**逆置換**と呼び，$\tau = \sigma^{-1}$ と表わす. □

定理 **（逆置換）**　置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \tag{242}$$

の逆置換は

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \tag{243}$$

で与えられる. □

例 **（逆置換の具体例）** □

定義（巡回置換）　n 個の文字 $\{1, 2, \cdots, n\}$ のうち r 個の文字 $\{k_1, k_2, \cdots, k_r\}$ のみを $k_1 \to k_2, k_2 \to k_3, \cdots, k_r \to k_1$ と順にずらし，残りの文字 $\{k_{r+1}, \cdots, k_n\}$ を $k_{r+1} \to k_{r+1}, \cdots, k_n \to k_n$ と動かさない写像の置換を**巡回置換**という．巡回置換は

$$\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & k_r & k_{r+1} & \cdots & k_n \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_r & k_1 & k_{r+1} & \cdots & k_n \end{pmatrix} \tag{244}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & k_r \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_r & k_1 \end{pmatrix} \tag{245}$$

と表わされ，省略するときは

$$\sigma = (k_1, k_2, \cdots, k_r) \tag{246}$$

と書く．

□

例（巡回置換の具体例）

□

定理（置換を巡回置換の積で表わす）　任意の置換 σ は巡回置換 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ の積 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ で表わされる．

□

例（置換を巡回置換の積で表わす計算例）

□

定義（互換）　2 文字の巡回置換 (i, j) を**互換**という．

□

定理（巡回置換を互換の積で表わす）　任意の巡回置換は互換の積で表わされる．たとえば，その一つとして

$$(k_1, k_2, \cdots, k_r) = (k_1, k_r)\cdots(k_1, k_3)(k_1, k_2) \tag{247}$$

と表わされる．

□

例（置換を互換の積で表わす）

□

注意　互換の積で表わす方法は幾通りもある．

□

定義（置換の符号）　置換 σ が m 個の互換の積で表わされるとき σ の**符号（sign）**を

$$\mathrm{sgn}\,(\sigma) = (-1)^m \tag{248}$$

と定義する．

□

例（置換の符号の具体例）

□

定理 **（置換の符号の一意性）**　置換 σ の符号 $\mathrm{sgn}\,(\sigma)$ は互換の積の表わし方によらず一意に定まる. □

定理 **（置換の符号の性質）**

$$\mathrm{sgn}\,(\epsilon) = 1 \tag{249}$$
$$\mathrm{sgn}\,(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}\,(\sigma)\mathrm{sgn}\,(\tau) \tag{250}$$
$$\mathrm{sgn}\,(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}\,(\sigma) \tag{251}$$

□

定義 **（偶置換，奇置換）**　$\mathrm{sgn}\,(\sigma) = 1$ となる置換を**偶置換**と呼び，$\mathrm{sgn}\,(\sigma) = -1$ となる置換を**奇置換**と呼ぶ. □

例 **（偶置換，奇置換の具体例）** □

定義 **（置換全体の集合）**　n 文字の置換 σ の全体の集合を S_n と書く. □

注意 **（置換全体の集合の要素の個数）**　n 文字の置換は写像

$$\{1, 2, \cdots, n\} \quad \to \quad \{k_1, k_2, \cdots, k_n\} \tag{252}$$

であるから，その個数は n 個の文字の順列組合わせに等しい．よって集合 S_n の個数は $n!$ である. □

例 **（置換全体の集合の具体例）**

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{\underset{\text{偶}}{\epsilon}\} \tag{253}$$
$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{\underset{\text{偶}}{\epsilon},\ \underset{\text{奇}}{(1, 2)}\} \tag{254}$$
$$S_3 = \tag{255}$$

□

問　4 次の置換全体の集合 S_4 の要素全てを書き出せ．またその偶奇も述べよ. □

問　S_n $(n \geq 2)$ に含まれる偶置換と奇置換の個数は等しい．これを示せ. □

§ 3.2 多項式の文字の置換

定義 **（多項式の変数の置換）** on 変数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n の多項式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と置換 $\sigma \in \S_n$ に対して

$$\sigma f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \cdots, x_{\sigma_n}) \tag{256}$$

と定義する. □

例 **（多項式の変数の置換の具体例）** □

定理 **（置換の積）** $\sigma, \tau \in S_n$ に対して

$$(\sigma\tau)f(x_1, \cdots, x_n) = (\sigma(\tau f))(x_1, \cdots, x_n) \tag{257}$$

が成立する.

（証明） □

定義 **（差積）** n 変数 $x_1, \cdots, x_n$ の多項式

$$\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \tag{258}$$

を**差積**と呼ぶ. □

例 **（差積の具体例）** □

定理 **（互換による差積の置換）** 互換 $\sigma = (i, j)$ に対して

$$\sigma\Delta(x_1, \cdots, x_n) = -\Delta(x_1, \cdots, x_n) \tag{259}$$

が成立する.

（証明） □

定理 **（差積の変数の置換）** 置換 $\sigma \in S_n$ に対して

$$\sigma\Delta(x_1, \cdots, x_n) = \operatorname{sgn}(\sigma)\Delta(x_1, \cdots, x_n) \tag{260}$$

が成立する.

（証明） □

定理 **（置換の符号の一意性）** 置換の符号は互換の積の表わし方によらず一意に定まる.

（証明） □

§ 3.3　行列式の定義

定義（行列式）　n 次正方行列 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ に対して

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\,(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)} \tag{261}$$

を A の**行列式（determinant）**という．A の行列式はまた

$$|A|, \quad |a_{ij}|, \quad \det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{262}$$

と書き表す. □

例（行列式の具体例） □

問　4 次の行列式を定義に従い書き下せ. □

注意（サルスの方法） □

§ 3.4 行列式の性質

定理 **（行列式の行に関する性質）** 行列式は次の性質もつ.

- $(1,1)$ 成分を除いて 1 列目が全て 0 の場合は行列式のサイズが一つ下がる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{263}$$

- 第 i 行目の要素全てが共通因子 α をもつとき，α は行列式の外へ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha\, a_{i1} & \alpha\, a_{i2} & \cdots & \alpha\, a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{264}$$

- 第 i 行が二つのベクトルの和で表されるとき，行列式の和に分解される.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{265}$$

- 第 i 行と第 j 行を入れ替えると行列式の符合が反転する.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{266}$$

- 同じ行があるときは行列式は 0 となる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{267}$$

- 第 j 行を α 倍して第 i 行に加えても行列式は等しい.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+\alpha a_{j1} & a_{i2}+\alpha a_{j2} & \cdots & a_{in}+\alpha a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{268}$$

□

問 これを示せ. □

定理 **（転置行列の行列式）**

$$\det({}^t A) = \det(A) \tag{269}$$

□

問 これを示せ. □

定理 **（行列式の列に関する性質）** □

問 これを示せ. □

例 **（行列式の計算の例）** □

定理

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D) \tag{270}$$

□

例 **（計算例）**

□

定理

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{271}$$

□

例 **（計算例）**

□

定理 **（行列式と行列の正則性）** 行列 A が正則行列のとき $\det(A) \neq 0$ が成り立つ．

（証明）

□

定理 **（逆行列の行列式）**

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \tag{272}$$

（証明）

□

定理 **（行列式の性質）**

(1) 一つの行を α 倍すると行列式は α 倍となる．

(2) 一つの行が二つの行ベクトルの和で表せる行列式は，他の行はそのままで，その行に各々の行ベクトルをとった行列式の和に等しい．

(3) 二つの行を入れ替えると行列式は -1 倍となる．

(4) 二つの行が等しい行列式は 0 である．

(5) 一つの行を α 倍して別の行に加えても行列式は変らない．

□

定理 **（行列式の性質）**

(1) 一つの列を α 倍すると行列式は α 倍となる．

(2) 一つの列が二つの列ベクトルの和で表せる行列式は，他の列はそのままで，その列に各々の列ベクトルをとった行列式の和に等しい．

(3) 二つの列を入れ替えると行列式は -1 倍となる．

(4) 二つの列が等しい行列式は 0 である．

(5) 一つの列を α 倍して別の列に加えても行列式は変らない．

（証明）$\det({}^tA) = \det(A)$ より

$$\det({}^tA)\text{ に行の基本変形} = \det(A)\text{ に列の基本変形} \tag{273}$$

□

§ 3.5 余因子

定義 （小部分行列と余因子） n 次正方行列 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ の第 i 行と第 j 列を取り除いた $n-1$ 次の小行列を

$$A_{ij} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \hline a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array}\right] \tag{274}$$

と書く．このときこの行列式に符号をつけた数

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| \tag{275}$$

を A における A_{ij} の**余因子**と呼ぶ. □

例 （余因子の具体例） □

§ 3.6 余因子展開

定理 **（余因子展開）**　第 i 行に関する余因子展開

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}| + (-1)^{i+3}a_{i2}|A_{i3}| + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}| \tag{276}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}|A_{ik}| \tag{277}$$

$$= a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + a_{i3}\Delta_{i3} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} \tag{278}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ik} \tag{279}$$

第 j 列に関する余因子展開

$$|A| = (-1)^{j+1}a_{1j}|A_{1j}| + (-1)^{j+2}a_{2j}|A_{2j}| + (-1)^{j+3}a_{2j}|A_{3j}| + \cdots + (-1)^{j+n}a_{nj}|A_{nj}| \tag{280}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}|A_{kj}| \tag{281}$$

$$= a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + a_{3j}\Delta_{3j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} \tag{282}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\Delta_{kj} \tag{283}$$

（証明）

□

例 **（余因子展開の計算例）**

□

例 **（余因子展開の計算例）**

□

例 **（余因子展開の計算例）**

□

§ 3.7 余因子行列

定義（**余因子行列**） n 次正方行列 A に対して

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} & \cdots & \Delta_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \Delta_{3n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \tag{284}$$

と定義される行列を A の**余因子行列**と呼ぶ. □

定理 正方行列 A とその余因子行列 $\tilde{A}$ に対して

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)E \tag{285}$$

が成立する.

（証明） □

§ 3.8 余因子行列と逆行列

定理（行列式と行列の正則性） 正方行列 A に対して，$\det(A) \neq 0$ のとき A は正則行列である．

（証明） □

定理（余因子行列と逆行列） 正方行列 A に対して，$\det(A) \neq 0$ のとき A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det(A)} \tag{286}$$

で与えられる．

（証明） □

定理（逆行列が存在するための十分条件） 正方行列 A, B に対して $AB = E$（または $BA = E$）が成立するとき，B は A の逆行列となる．

（証明） □

例（逆行列の計算例） □

§ 3.9 クラメールの公式

定理（クラメールの公式） 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に関して，A が正則な n 次正方行列であるとき，解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \tag{287}$$

$$x_i = \frac{\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n]}{\det(A)} \tag{288}$$

で与えられる．

（証明） □

注意 解をもつためには分母 $\det(A)$ が 0 となってはダメ． □

例（クラメールの公式の使用例） □

§ 3.10 ちょっとまとめ

定理 n 次正方行列 A に対して次の条件は等価である.

(1) $\det(A) \neq 0$

(2) A は正則である.

(3) $\mathrm{rank}\,(A) = n$

(4) A は E に簡約化できる.

(5) A は逆行列をもつ.

(6) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は一意な解をもつ.

（証明） $\square$

定理 n 次正方行列 A に対して次の条件は等価である.

(1) $\det(A) = 0$

(2) A は非正則である.

(3) $\mathrm{rank}\,(A) < n$

(4) A は E に簡約化できない.
（簡約化行列は零ベクトルの行ベクトルを含む.）

(5) A は逆行列をもたない.

(6) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は一意な解をもたない.
（任意定数を含む解をもつ．もしくは，解をもたない.）

（証明） $\square$

§ 3.11 いろいろな行列式

定理（ヴァンデルモンド の行列式）

$$V = \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_2 \\ (x_1)^2 & (x_2)^2 & \cdots & (x_2)^2 \\ (x_1)^3 & (x_2)^3 & \cdots & (x_2)^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_1)^{n-1} & (x_2)^{n-1} & \cdots & (x_2)^{n-1} \end{vmatrix}}^{n} = \prod_{i\le i<j\le n}(x_j - x_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i\le i<j\le n}(x_i - x_j) \quad (289)$$

（証明）

□

例（ヴァンデルモンド の行列式の具体例）

□

定理（コンパニオン行列式）

$$F = \underbrace{\begin{vmatrix} a_0 & -1 & & & & \\ a_1 & x & -1 & & & \\ a_2 & & x & -1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & & & & \ddots & -1 \\ a_n & & & & & x \end{vmatrix}}_{n+1} \quad (290)$$

（証明）

□

例（コンパニオン行列式の具体例）

□

例

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & d & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0 \quad (291)$$

□