3. 行列式

一意な解を判別するには？

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \text{—①} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \text{—②} \end{cases}$$

解を求める！

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \circlearrowleft -\frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}} \end{array}\right]$$

①式に $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ をかけて②へ加えると

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \text{—①} \\ \left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}\right)x_2 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 & \text{—②} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \text{—①} \\ \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}x_2 = b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}} & \text{—②} \end{cases}$$

$$\frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}}$$

ランクは落ちず

を得る。$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ のとき一意な解をもつ。すなわち

②式に $\frac{-a_{11}a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$ をかけて①へ加えると。

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &= b_1 - \left(b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}}\right)\frac{a_{11}a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ &= b_1 - \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{\cancel{a_{11}}}\frac{\cancel{a_{11}}a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ &= b_1 - \frac{(a_{11}b_2 - a_{21}b_1)a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ &= \frac{b_1(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) - (a_{11}b_2 - a_{21}b_1)a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ &= \frac{a_{11}a_{22}b_1 - \cancel{a_{12}a_{21}b_1} - a_{11}a_{12}b_2 + \cancel{a_{12}a_{21}b_1}}{\quad} \\ &= \frac{a_{11}(a_{22}b_1 - a_{12}b_2)}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cancel{a_{11}}x_1 = \frac{\cancel{a_{11}}(a_{22}b_1 - a_{12}b_2)}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{\cancel{a_{11}}}x_2 = \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{\cancel{a_{11}}} \end{cases}$$

となり、解として

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

を得る。

$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$ のときは ランクが ~~[illegible]~~ 一つ落ちて任意定数を含む解をもつ。

すなわち

$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$ より

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = \dfrac{b_1-a_{11}c}{a_{12}} \end{cases}$$

である。このように $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ が零か非零かで方程式の解の条件がかわる。

ここで 行列 $A=[a_{ij}]_{2\times2}$ に対して 行列式 (determinant)

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

を定義する。~~これより~~ $\det(A)\neq0$ のとき方程式 $Ax=b$ は一意な解をもち、$\det(A)=0$ のときは、任意定数を含む解となる。

これを用いると行列式は方程式の判別式となる。

では 2×2 型ではなく より大きな型の場合には 行列式はどう定義されるだろうか、

1×1 $\quad \det(A)=|a_{11}|=a_{11}$ $\qquad a_{11}x_1=b_1$

2×2 $\quad \det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ $\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+\cdots=b_2 \end{cases}$

3×3 $\quad \det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 \cdots x_3=b_1 \\ \cdots=b_2 \\ \cdots=b_3 \end{cases}$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}$$
$$=(+)a_{11}a_{22}a_{33}(+)a_{12}a_{23}a_{31}(+)a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$(-)a_{13}a_{22}a_{31}(-)a_{12}a_{21}a_{33}(-)a_{11}a_{23}a_{32}$$

$3!$ の組み合わせ

4×4 $\quad \det(A)=?$

$n\times n$ $\quad \det(A)=|a_{ij}|_{n\times n}$

$$=\sum(\pm1)\,a_{1k_1}a_{2k_2}a_{3k_3}\cdots a_{nk_n}$$

$n!$

$(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ は 1から n まで並らべる全組み合わせ

$S_n = \{$ 1からnまでを並べる全組み合わせ $\}$ $\ni$

$S_3 \ni$
(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)
(3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)

||

$S_n = \{$ $(1, 2, 3, \cdots, n)$ を $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ へ並び換える全組み合わせ. $\}$

$S_3 \ni$

~~{置換全体の集合 n=3}~~ $\ni$

置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{例}}$ $\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&2&3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&3&1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&2&1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1&3&2 \\ 1&3&2 \end{pmatrix}$

ある置換に対して符号を定める.

$$\det_{3\times3}(A) = \sum_{S_3 \ni \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ k_1&k_2&k_3 \end{pmatrix}} (\pm 1)\, a_{1k_1} a_{2k_2} a_{3k_3}.$$

$$\det_{2\times2}(A) = \sum_{S_2 \ni \begin{pmatrix} 1&2 \\ k_1&k_2 \end{pmatrix}} (\pm 1)\, a_{1k_1} a_{2k_2}$$

$$\det_{1\times1}(A) = \sum_{S_1 \ni (k_1)} (\pm 1)\, a_{1k_1}$$

$\boxed{\text{問}}$ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ が一意な解をもつかの判別式を求めよ.

$\boxed{\text{予想}}$ $$\det(A) = \sum_{(k_1 k_2 \cdots k_n) \in S_n} (\pm)\, a_{1,k_1} a_{2,k_2} \cdots a_{n,k_n}$$

の形になってるみたいだ!

$\underline{n=1}$ $\det(A) = \sum_{\{(1)\} \ni \{k_1\}} a_{1,k_1}$

$\underline{n=2}$ $\det(A) = \sum_{\{(1,2),(2,1)\} \ni \{k_1, k_2\}} (\pm)\, a_{1,k_1} a_{2,k_2}$

$\underline{n=3}$

$$\det(A) = \sum_{\{(1,2,3), (\ ), (\ ), (\ ), (\ ), (\ )\} \ni \{k_1, k_2, k_3\}} (\pm)\, a_{1k_1} a_{2k_2} a_{3k_3}$$

§置換

定義

n個の文字$\{1,2,\cdots,n\}$から自分自身$\{1,2,\cdots,n\}$への1対1の写像をn文字の置換という。

n文字の置換σが写像

$$1\to k_1,\ 2\to k_2,\ \cdots,\ n\to k_n$$

のとき、σを

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{pmatrix}$$

と表す。写像 $i\to k_i$ を $\sigma(i)=k_i$ と表す。

例（置換の具体例）

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\qquad 1\to3,\ 2\to1,\ 3\to4,\ 4\to2$$

$$\sigma(1)=3,\ \sigma(2)=1,\ \sigma(3)=4,\ \sigma(4)=2.$$

例（置換の表記）

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{2}&4&1&3\\\boxed{2}&1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&4\\3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4&1\\4&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&4\\4&3&1\end{pmatrix}$$

$1\to3$
$2\to2$
$3\to4$
$4\to1$

・変化のないところは省略。
・順番はどうでもよい。

定義

置換σ,τの積$\sigma\tau$を

$$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\k_1&k_2&\cdots&k_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\cdots&n\\l_1&\cdots&l_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\k_{l_1}&k_{l_2}&\cdots&k_{l_n}\end{pmatrix}$$

または

$$(\sigma\tau)(i)=\sigma(\tau(i))\qquad i=1,2,\cdots,n$$

と定義する。

例（置換の積の具体例）

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix},\quad \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$$

$$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\\sigma(\tau(1))&\sigma(\tau(2))&\sigma(\tau(3))&\sigma(\tau(4))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\\sigma(2)&\sigma(3)&\sigma(4)&\sigma(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$$

$$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$$

$$\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$$

注意（置換の積は非可換）

一般的に $\sigma\tau=\tau\sigma$ は成立しない。

定義 (単位置換)

全ての文字を動かさない置換

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

を単位置換とよぶ。

定義 (逆置換)

置換 σ に対して $\tau\sigma = \sigma\tau = \varepsilon$ をみたすτを

$\cancel{\tau\sigma = \sigma\tau = \varepsilon}$

σの逆置換とよび, $\tau = \sigma^{-1}$ と表す。

定理 (逆置換)

置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ の逆置換は $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ で与えられる。

(証明)

$$\sigma^{-1}\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \varepsilon$$

$$\cancel{= \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}}$$

$$\sigma\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \varepsilon$$

$$\therefore \sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \varepsilon \quad /\!/$$

例 (逆置換の具体例)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad /\!/$$

定義 (巡回置換)

$\{1,2,\cdots,n\}$ のうち r 個の文字 $\{k_1, k_2 \cdots k_r\}$ のみを $k_1 \to k_2$, $k_2 \to k_3$, $\cdots$, $k_r \to k_1$ と順にずらす ~~置換~~, のこりの文字 $\{k_{r+1} \cdots k_n\}$ は動かさない $k_{r+1} \to k_{r+1}$, $\cdots$, $k_n \to k_n$

写像の置換を巡回置換という.

このとき巡回置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & k_r & k_{r+1} & \cdots & k_n \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_r & k_1 & k_{r+1} & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_{r-1} & k_r \\ k_2 & k_3 & k_r & k_1 \end{pmatrix}$$

を

$$\sigma = (k_1 \cdots k_r)$$

と省略して書く.

例 (巡回置換)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\,5\,3)$$

$$= (5\,3\,2) = (3\,2\,5)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\,3\,2)$$

$$= (3\,2\,1)$$

$$= (2\,1\,3)$$

定理 (置換を巡回置換の積で表す)

任意の置換 σ は巡回置換 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ の積 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m$ で表される.

例

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 7 \\ 6 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} = (1\,4\,2)(3\,6\,5\,7)$$

$$\cancel{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}} \quad \cancel{\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 7 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} 2 & 3 & 7 & 6 \\ 3 & 7 & 6 & 2 \end{matrix}} \right)$$

$$= \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{matrix}} \begin{matrix} 2 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 3 & 7 & 6 \\ 3 & 7 & 6 & 2 \end{matrix}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 6 \\ 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 5\ 4)(2\ 3\ 7\ 6) \quad //$$

$\boxed{\text{定義}}$ (互換)

~~巡回置換のうち2文字の~~

2文字の巡回置換 $(i\ j)$ を互換という。

$\boxed{\text{定理}}$ (巡回置換を互換の積で表す)

任意の巡回置換は互換の積で表される。たとえば その一つとして

$$(k_1\ k_2 \cdots k_r) = (k_1\ k_r) \cdots (k_1\ k_3)(k_1\ k_2)$$

と表される。

(任意の置換は互換の積で表される)

$\boxed{\text{例}}$ たとえば

$$(1\ 2\ 3\ 4) = \overbrace{(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)}^{3\text{個}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$1 \to 2 \to 2 \to 2$ $\quad 1 \to 2$

$2 \to 1 \to 3 \to 3$ $\quad 2 \to 3$

$3 \to 3 \to 1 \to 4$ $\quad 3 \to 4$

$4 \to 4 \to 4 \to 1$ $\quad 4 \to 1$

たとえば

$$(1\ 2\ 3\ 4) = \overbrace{(1\ 3)(1\ 4)(3\ 4)(2\ 3)(1\ 3)}^{5\text{個}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$1 \to 3 \to 2 \to 2 \to 2 \to 2$

$2 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1 \to 3$

$3 \to 1 \to 1 \to 1 \to 4 \to 4$

$4 \to 4 \to 4 \to 3 \to 3 \to 1$

とも表される。

$\boxed{\text{注}}$ 互換で表すには 幾通りもある。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)$$

1 2 3 4
1 2 4 3
1 3 4 2
2 3 4 1

$\boxed{\text{定義}}$ (置換の符号)

置換 σ が m 個の互換の積で表されるとき, σ の符号を

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m$$

と定義する.

$\boxed{\text{例}}$ $\sigma = (1\,2\,3\,4)$

$$\mathrm{sgn}\,\sigma = \mathrm{sgn}(1\,2\,3\,4) = \mathrm{sgn}\big((1\,4)(1\,3)(1\,2)\big) = (-1)^3 = -1$$

$$= \mathrm{sgn}\big((1\,3)(1\,4)(3\,4)(2\,3)(1\,3)\big) = (-1)^5 = -1$$

$\boxed{\text{定理}}$ (置換の符号の一意性)

置換 σ の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ は互換の積の表し方によらず決まる.

(証明) 後述.

$\boxed{\text{注意}}$ 単位置換は $\varepsilon = (1\,2)(1\,2)$ と書けるから $\mathrm{sgn}(\varepsilon) = (-1)^2 = 1$ となる.

$\boxed{\text{定理}}$ 積

$$\sigma = \overbrace{(i_1\,j_1)(i_2\,j_2)\cdots(i_k\,j_k)}^{k}$$

$$\tau = \underbrace{(i_{k+1}\,j_{k+1})(\,\cdot\,\cdot\,)\cdots(i\quad)}_{\ell}$$

$$\sigma\tau = \underbrace{(\quad)(\quad)\cdots(i_{k+\ell}\,j_{k+\ell})}_{k+\ell}$$

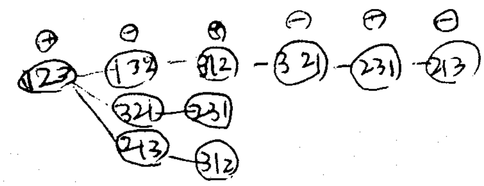
$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$$

逆置換

$$\sigma\sigma^{-1} = \varepsilon$$

$$\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\varepsilon) = 1$$

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{sgn}(\sigma)} = \mathrm{sgn}(\sigma)$$



定義 $\mathrm{sgn}(\sigma)=1$ となる σ を偶置換とよび、$\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$ となる σ を奇置換とよぶ。

例

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&6&8&2&1&4&9&3&5\end{pmatrix}$$

$$=\left(\boxed{\begin{matrix}1&7&9&5\\7&9&5&1\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}2&6&4\\6&4&2\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}3&8\\8&3\end{matrix}}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1&7&9&5\\7&9&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6&4\\6&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&8\\8&3\end{pmatrix}$$

$$=(1\ 7\ 9\ 5)(2\ 6\ 4)(3\ 8)$$

$$=\underbrace{(1\ 5)(1\ 9)(1\ 7)(2\ 4)(2\ 6)(3\ 8)}_{6\text{コ}}$$

$\mathrm{sgn}(\sigma)=(-1)^6=1$ 　σ は偶置換

定義 (置換全体の集合)

n 文字の置換 σ の全体の集合を S_n と書く。

$1, 2, \cdots n \to k_1, k_2, \cdots k_n$ を並べ換える順番を考えて

n 個の順列組み合わせの個数 $=n!$

例

$$S_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\{\underset{\text{偶}}{\varepsilon},\ \underset{\text{奇}}{(2\ 3)},\ \underset{\text{奇}}{(1\ 3)},\ \underset{\substack{\|\\(1\,3)(1\,2)\\ \text{偶}}}{(1\ 2\ 3)},\ \underset{\substack{\|\\(1\,2)(1\,3)\\ \text{偶}}}{(1\ 3\ 2)},\ \underset{\text{奇}}{(1\ 2)}\}$$

偶 3コ
奇 3コ

$$S_2=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right\}=\{\underset{\text{偶}}{\varepsilon},\ \underset{\text{奇}}{(1\ 2)}\}$$

$$S_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}=\{\varepsilon\}$$

問 4次の置換全体の集合 S_4 の要素を全て書き出せ。また、その偶奇をのべよ。

問 $S_n\ (n\geq 2)$ は偶置換と

定義

n 変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の多項式 $f(x_1 \cdots x_n)$ と
置換 $\sigma \in S_n$ に対して

$$\sigma f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$

と定義する.

例

$f(x_1 x_2 x_3) = x_1 x_2 + 2x_2 + 3x_3$ とする.

$\sigma = (12)$ のとき　$\sigma f(x_1 x_2 x_3) = f(x_2, x_1, x_3) = x_2 x_1 + 2x_1 + 3x_3$.

$\sigma = (1\ 2\ 3)$ のとき

$\sigma f(x_1 x_2 x_3) = f(x_2\ x_3\ x_1) = x_2 x_3 + 2x_3 + 3x_1$

定理

定義 (差積)

n 変数 $x_1 \cdots x_n$ の多項式

$$\Delta(x_1 x_2 \cdots x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$$

を差積とよぶ.

例

~~$\Delta(x_1)$ なし~~

$\Delta(x_1 x_2) = (x_1 - x_2)$

$\Delta(x_1 x_2 x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$

$\Delta(x_1 x_2 x_3 x_4) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)$
$\times (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)$
$\times (x_3 - x_4)$

$\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)$
$\times (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_4 - x_5)$
$\times (x_3 - x_4)(x_3 - x_5)$
$\times (x_4 - x_5)$

定理

$\sigma, \tau \in S_n$ に対して

$$(\sigma\tau) f(x_1 \cdots x_n) = (\sigma(\tau f))(x_1 \cdots x_n)$$

が成立する.

(証明)

$$\text{左辺} = (\sigma\tau) f(x_1 \cdots x_n) = f(x_{(\sigma\tau)(1)}\, x_{(\sigma\tau)(2)} \cdots x_{(\sigma\tau)(n)})$$

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= (\sigma(\tau f))(x_1 \cdots x_n) = \sigma\ f(x_{\tau(1)}\, x_{\tau(2)} \cdots x_{\tau(n)}) \\ &= f(x_{\sigma(\tau(1))}\, x_{\sigma(\tau(2))} \cdots x_{\sigma(\tau(n))}) \\ &= f(x_{(\sigma\tau)(1)}\, x_{(\sigma\tau)(2)} \cdots x_{(\sigma\tau)(n)}) \quad //\end{aligned}$$

定理

互換 $\sigma = (\overset{i\ \ j}{\cancel{k_1\ k_2}})$ に対して

$$\sigma \Delta(x_1 \cdots x_n) = -\Delta(x_1 \cdots x_n)$$

が成り立つ.

(証明)

$$\sigma \Delta(x_1 \cdots x_n) = (i\ j) \prod_{1 \le k < l \le n} (x_k - x_l)$$

iとjを入れかえ.

$$= \left\{\begin{array}{llllll} (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots & (x_1 - x_i) \cdots & & (x_1 - x_j) & \cdots & (x_1 - x_n) \\ \quad (x_2 - x_3) \cdots & (x_2 - x_i) & & (x_2 - x_j) & & \\ & \vdots & & \vdots & & \\ & (x_{i-1} - x_i) & & (x_{i-1} - x_j) & \cdots & (x_i - x_n) \\ & & (x_i - x_{i+1}) & (x_i - x_j) & \cdots & (x_i - x_n) \\ & & & (x_{i+1} - x_j) & & \vdots \\ & & & (x_{j-1} - x_j) & & \\ & & & (x_j \cdots) & & \\ & & & & & (x_{n-1} - x_n) \end{array}\right.$$

$$= \begin{array}{llll} (x_1 - x_n) & (x_1 - x_j) & (x_1 - x_i) & \\ & \vdots & \vdots & \\ & (x_{i-1} - x_j) & (x_{i-1} - x_i) & \\ & (x_j - x_{i+1}) \cdots & (x_j - x_i)\ (x_i - x_{j+1}) & \\ & & (x_{i+1} - x_i) & \end{array}$$

$$= (x_j - x_i) \frac{\Delta(x_1 \cdots x_n)}{(x_i - x_j)} = -\Delta(x_1 \cdots x_n) \quad //$$

$\boxed{\text{定理}}$

置換 $\sigma \in S_n$ に対して

$$\sigma \Delta(x_1 \cdots x_n) = (-1)^m \Delta(x_1 \cdots x_n)$$

が成立する。ここで m は σ を互換の積に分解したときの互換の個数である。

(証明) $\sigma = \sigma_m \sigma_{m-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1$ と表す。

これより

$$\sigma \Delta(x_1 \cdots x_n) = \sigma_m \sigma_{m-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1 \Delta(x_1 \cdots x_n)$$
$$= -\sigma_m \sigma_{m-1} \cdots \sigma_2 \Delta = (-1)^2 \sigma_m \sigma_{m-1} \cdots \sigma_3 \Delta$$
$$= (-1)^m \Delta(x_1 \cdots x_n)$$

$\boxed{\text{定理}}$

置換の積は互換の表し方によらず一意に定まる。

(証明) $\left.\begin{array}{l}\sigma = \sigma_m \sigma_{m-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1 \\ \sigma = \tau_l \tau_{l-1} \cdots \tau_2 \tau_1\end{array}\right\}$ と互換の積で表せたとする。

このとき

$$\sigma \Delta(x_1 \cdots x_n) = (\sigma_m \cdots \sigma_1) \Delta(x_1 \cdots x_n)$$
$$= (-1)^m \Delta$$

$$\sigma \Delta(x_1 \cdots x_n) = (\tau_l \cdots \tau_1) \Delta(x_1 \cdots x_n)$$
$$= (-1)^l \Delta$$

を得る。$(-1)^m \Delta(x_1 \cdots x_n) = (-1)^l \Delta(x_1 \cdots x_n)$ となる。

$\Delta \neq 0$ より $(-1)^m = (-1)^l$ が成り立つ。

以上より 符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ は互換の表しかたによらず

$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m = (-1)^l$ と一意に定まる。

§ 行列式

定義 (行列式)

n次正方行列 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ に対して

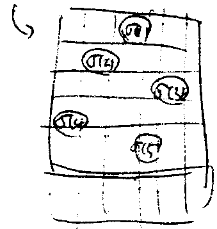
$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,a_{1,\sigma(1)}\,a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$$

を A の行列式 (determinant) と定義する.

Aの行列式はまた

$$|A|,\ |a_{ij}|,\ \det\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},\ \begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

と書き表す.



例

$\underline{n=1}$

$$S_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}=\{\overset{偶}{\varepsilon}\}$$

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_1}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}=\sum_{\sigma\in\{\binom{1}{1}\}=\{\varepsilon\}}a_{1,\sigma(1)}=a_{1\sigma(1)}=a_{11}$$ //

$\underline{n=2}$

$$S_1=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right\}=\{\overset{偶}{\varepsilon},\overset{奇}{(1\,2)}\}$$

$\operatorname{sgn}(\varepsilon)=1,\quad \operatorname{sgn}(1\,2)=-1.$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}\,a_{2,\sigma(2)}$$

$$=\sum_{\sigma\in\{\varepsilon,(1\,2)\}}\operatorname{sgn}(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}\,a_{2\sigma(2)}=\operatorname{sgn}(\varepsilon)\,a_{11}a_{22}+\operatorname{sgn}(\varepsilon)\,a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$\underline{n=3}$

$$S_3=\{\overset{偶}{\varepsilon},\overset{奇}{(1\,2)},\overset{奇}{(2\,3)},\overset{奇}{(1\,3)},\overset{偶}{(1\,2\,3)},\overset{偶}{(1\,3\,2)}\}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

問 4次の行列式を定義に従い書き下せ。

$4! = 24$通り

$$S_4 = \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix},$$

$$\left. \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\ & & & \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}.$$

サルスの方法.

$$|a_{11}| = a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + \cdots$$

§行列式の性質

定理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(1,1)成分をのぞいて
1列目が0の場合、
行列式のサイズ1つ下がる。

定理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第i行がα倍されているとき、
α倍は行列式の外へ。
一行にα倍したものと
行列式をα倍したものと等しい。

定理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第i行が
2つのベクトルの和で
表されているとき、
行列式の和に分解

定理

$$\begin{array}{c} \\ j \rightarrow \\ i \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \end{vmatrix}$$

第i行と第j行を
入れかえると、
行列式の符号が反転。

定理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

同じ二つの行があるときは
0.

定理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1}+\alpha a_{j1} & \cdots & a_{in}+\alpha a_{jn} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第j行をα倍して
第i行に加えても等しい。

問 これを示せ。

定理 $\det({}^tA) = \det(A)$ 　問 これを示せ.

定理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{\qquad\qquad} & \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} j \\ \left| \begin{matrix} \cdots & \alpha a_{1j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \alpha a_{nj} & \cdots \end{matrix} \right| \end{array} = \alpha \begin{array}{c} j \\ \left| \begin{matrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & a_{1n} & \cdots \end{matrix} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} j \\ \left| \begin{matrix} \cdots & b_1+c_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_n+c_n & \cdots \end{matrix} \right| \end{array} = \begin{array}{c} j \\ \left| \begin{matrix} \cdots & b_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_n & \cdots \end{matrix} \right| \end{array} + \begin{array}{c} j \\ \left| \begin{matrix} \cdots & c_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & c_n & \cdots \end{matrix} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{c} j \quad\quad i \\ \left| \begin{matrix} a_{1i} & a_{1j} \\ \vdots & \vdots \\ a_{ni} & a_{nj} \end{matrix} \right| \end{array} = - \begin{array}{c} j \quad\quad i \\ \left| \begin{matrix} a_{1j} & a_{1i} \\ \vdots & \vdots \\ a_{nj} & a_{ni} \end{matrix} \right| \end{array}$$

$$\left| \begin{matrix} b_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ b_n & b_n \end{matrix} \right| = 0$$

$$\begin{array}{c} i \qquad\qquad j \\ \left| \begin{matrix} a_{1i}+\alpha a_{1j} & a_{1j} \\ \vdots & \vdots \\ a_{ni}+\alpha a_{nj} & a_{nj} \end{matrix} \right| \end{array} = \begin{array}{c} i \quad\quad j \\ \left| \begin{matrix} a_{1i} & a_{1j} \\ \vdots & \vdots \\ a_{ni} & a_{nj} \end{matrix} \right| \end{array}$$

問 これを示せ.

例

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3(8-3) = 15$$

上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

問 これを示せ

対角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

単位行列

$$\begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a+3 & b+6 & c+9 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & b & c \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & b+2a & c \\ 7 & 16 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & 9 \\ 7 & 16 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} b+2a & c \\ 16 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 16 & 4 \end{vmatrix} = -(4b+8a-16c) - (48-144)$$

$$= -4b-8a+16c+96$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2\times2 & 2\times3 & 2\times1 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\times2\times|1| = -3\times2\times1 = -6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 11 & 11 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 11 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 11 \times \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11 \times \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 0 & -14 \end{vmatrix} = 11 \times |-14| = 11 \times (-14) = \cancel{-44}\ -154$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = - \cancel{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ & & & \\ & & & \\ 0 & 3 & -5 & 8 \end{vmatrix}}$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & -5 & 8 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -5 & 26 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 26 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & 26 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 26 = 16$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{-4 \times 3 \times 4}_{12 \times 4} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -48 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 48 |1| = 48$$

定理

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D)$$

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (6-35)(9+8) = -29 \times 17$$

$$= -493$$

定理

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

例

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{bmatrix}$$

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

$\boxed{\text{定理}}$ Aが正則行列のとき $\det(A) \neq 0$ となる.

(証明) Aは逆行列をもつので,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

が成り立つ. 両辺を逆行列をとると

$$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$$

$$\det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A)$$

$$\det(E) = 1.$$

$$\rightarrow \quad \det(A)\det(A^{-1}) = \det(E) = 1$$

を得る. $\det(A)$ と $\det(A^{-1})$ ~~は非零である~~ の積が非零なので

$\det(A)$ と $\det(A^{-1})$ とは非零である.

$\boxed{\text{定理}}$ $$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

(証明) $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ より

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$ //.

まとめ （クラメルの公式のあとで

定理

n次正方行列 $\underset{(n\times n)}{A}$ に対して以下の条件は等価である

~~(1) A は正則である.~~

~~(2)~~ (1) $\det(A) \neq 0$

(2) A は正則である.

(3) $\mathrm{rank}(A) = n$

(4) A は逆行列をもつ

(5) $\underset{\text{方程式}}{Ax = b}$ は一意な解をもつ.

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|}$$

$$x = A^{-1}b$$

$$x_i = \frac{(\cdots \overset{i}{b} \cdots)}{|A|}$$

（証明） (2) ~ (5) は等価な条件であることは証明済.
(2) ⇒ (1) は前述定理.

定理

(1) 一つの行をα倍すると、行列式はα倍になる。

(2) 一つの行が二つの行ベクトルの和である行列式は、他の行はそのままで、その行に各々の行ベクトルをとった行列式の和に等しい。

(3) 二つの行を入れ替えると行列式は−1倍になる。

(4) 二つの行が等しい行列式は0である。

(5) 一つの行をα倍して別の行に加えても行列式は変わらない。

定理

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

定理

(1) 一つの列をα倍すると、行列式はα倍になる。

(2) 一つの列が二つの列ベクトルの和である行列式は、他の列はそのままで、その列に各々の列ベクトルをとった行列式の和に等しい。

(3) 二つの列を入れ替えると行列式は−1倍になる。

(4) 二つの列が等しい行列式は0である

(5) 一つの列をα倍して別の行に加えても行列式は変わらない。

例 $\det({}^tA)$ に行の変形 $=$ $\det(A)$ に列の変形

余因子行列

$\boxed{\text{定義}}$ n 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,} & & \\ a_{i,1} & & & a_{i,j} & & & \\ a_{i+1,1} & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n,1} & & & a_{n,j} & & & a_{n,n} \end{bmatrix} \left.\vphantom{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}\right\} n$$

j 列 ← i 列

の第 i 行と第 j 列を取り除いた小行列を (n−1 次の)

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i-1,1} & & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \left.\vphantom{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}\right\} n-1$$

と書くとき、$n-1$ 次の小行列式に符号をつけた

$$a_{ij}^* = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

を A における A_{ij} の余因子とよぶ。

$\boxed{\text{例}}$ (余因子の具体例)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$ を考える.

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$a_{12}^* = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(20-0) = -20$$

$$a_{22}^* = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = +(15+4) = 19.$$

$\boxed{\text{定理}}$ (余因子展開)

第 j ~~行~~ 列に関する余因子展開.

$$|A| = (-1)^{j+1} a_{1j} |A_{1j}| + (-1)^{j+2} a_{2j} |A_{2j}| + (-1)^{j+3} a_{3j} |A_{3j}| + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{j+n} a_{nj} |A_{nj}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{kj} |A_{kj}|$$

$$\det(A) = a_{1j} a_{1j}^* + a_{2j} a_{2j}^* + a_{3j} a_{3j}^* + \cdots + a_{nj} a_{nj}^* = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} a_{kj}^*$$

第 i 行に関する ~~余因子~~ 余因子展開.

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |A_{i2}| + (-1)^{i+3} a_{i3} |A_{i3}| + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} |A_{ik}| \quad (-1)^{i+k}$$

$$\det(A) = a_{i1} a_{i1}^* + a_{i2} a_{i2}^* + a_{i3} a_{i3}^* + \cdots + a_{in} a_{in}^*$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ik}^*$$

(導出) 第1行に関する余因子展開

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{21} & & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & & \\ & & \text{〃} & & \\ & & & & \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & & & \\ & & \text{〃} & & & \\ & & & & & \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \hline & & & \\ & \text{〃} & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{22} & a_{21} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{23} & a_{21} a_{22} & a_{24} \cdots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n3} & a_{n1} a_{n2} & a_{n4} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{2n} & a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} |A_{1k}|$$

$$|A| = a_{11}|A_{11}| + (-1) a_{12}|A_{12}| + (-1)^2 a_{13}|A_{13}| + \cdots + (-1)^{n-1} a_{1n}|A_{1n}|$$

$$= a_{11}a_{11}^* + a_{12}a_{12}^* + a_{13}a_{13}^* + \cdots + a_{1n}a_{1n}^* . = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{1k}^*$$

第2行に関する余因子展開.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 第1行の余因子展開.

$$= (-1) a_{21}|A_{21}| + (-1)^2 a_{22}|A_{22}| + (-1)^3 a_{23}|A_{23}| + \cdots + (-1)^n a_{1n}|A_{2n}|$$

$$= a_{21}a_{21}^* + a_{22}a_{22}^* + a_{23}a_{23}^* + \cdots + a_{2n}a_{2n}^* = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}a_{2k}^* \cdots$$ $= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{2+k} a_{2k} \times |A_{2k}|$

第 i 行に関する余因子展開

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ \boxed{a_{i1} \; \cdots \; a_{in}} & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\overset{i-1+2}{i+1}} \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & & \\ & \cdot & \end{vmatrix}$$ 同様に.

$$= (-1)^{i+1} a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2}|A_{i2}| + (-1)^{i+3} a_{i3}|A_{i3}| + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{i+n} a_{in}|A_{in}|$$

$$= a_{i1}a_{i1}^* + a_{i2}a_{i2}^* + a_{i3}a_{i3}^* + \cdots + a_{in}a_{in}^* = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ik}^* .$$

列の場合も同様.

(余因子展開の計算例.)

例

$$\begin{vmatrix} 2 & \boxed{7} & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -7 \times 9 + 2 \times (6-4) - 5 \times (-12) = -76 + 4 + 60 = -12$$

例

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 2} \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \cancel{-0\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}} \cancel{+0\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}} - 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -2(32-35)$$

$$= 6$$

例

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a & & & b \\ b & a & & \\ & b & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ & & b & a \end{vmatrix}}_{n} = a\underbrace{\begin{vmatrix} a & & \\ b & \ddots & \\ & b & a \end{vmatrix}}_{n-1} + (-1)^{n+1} b \underbrace{\begin{vmatrix} b & a & \\ & \ddots & a \\ & & b \end{vmatrix}}_{n-1}$$

$$= a \times a^{n-1} + (-1)^{n+1} b \cdot b^{n-1} = a^n + (-1)^{n+1} b^n$$

$\boxed{\text{定義}}$（余因子行列）

n次正方行列 A に対して、

余因子 $a_{ij}^* = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ を用いて

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & a_{31}^* & \cdots & a_{n1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & a_{32}^* & \cdots & a_{n2}^* \\ a_{13}^* & a_{23}^* & a_{33}^* & \cdots & a_{n3}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & a_{3n}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{bmatrix}$$ ← 並び方に注意

と定義される行列を A の余因子行列とよぶ。

$\boxed{\text{定理}}$（余因子行列の性質）

正方行列 A とその余因子行列 $\tilde{A}$ に関して

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)E.$$

が成り立つ。

（証明）

$A = [a_{ij}]$, $\tilde{A} = [a_{ji}^*]$, $A\tilde{A} = [c_{ij}]$ とおく。積の定義より

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}^* = a_{i1}a_{j1}^* + a_{i2}a_{j2}^* + a_{i3}a_{j3}^* + \cdots + a_{in}a_{jn}^*$$

が成り立つ。これは A の第 j 行の余因子展開である。よって、

$$c_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \end{array}$$

となる。第 j 行に第 i 行の成分が入っている。よって、i≠j のとき、同じ二つの行が行列式にあるので $c_{ij} = 0$ となる。i=j のときは、|A| の余因子展開そのものなので

$c_{ij} = \det(A)$ となる。以上より $c_{ij} = \det(A)\delta_{ij}$ と書ける。

よって $A\tilde{A} = [c_{ij}] = \det(A)[\delta_{ij}] = \det(A)E$ を得る。

$\tilde{A}A = \det(A)E$ の場合も同様に示される。

（行列式と行列の正則性）（余因子行列と逆行列）

定理 ~~（余因子行列と逆行列）~~

$\det(A) \neq 0$ のとき,

A は正則となり, 逆行列は $A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}}{\det(A)}$ で与えられる.

（証明） $A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)E$ より, 全辺を $\det(A)$ で割ると

$$A\left(\frac{\tilde{A}}{\det(A)}\right) = \left(\frac{\tilde{A}}{\det(A)}\right)A = E.$$

よって $\dfrac{\tilde{A}}{\det(A)}$ は A の逆行列である. //

定理 （逆行列が存在するための十分条件）

正方行列 A, B に対して $AB=E$（または $BA=E$）が成り立つとき,

B は A の逆行列となる.

（証明） $AB=E$ より

$$|A||B| = |AB| = |E| = 1.$$

となり $|A| \neq 0$ である. 前定理より A は A^{-1} をもつ.

更に, A^{-1}が存在することを用いて, $B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1}$

が成り立つ. B は A^{-1} そのものである. 以上により $AB=E \Rightarrow B=A^{-1}$ //

$\boxed{例}$ (逆行列の計算例)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} +|A_{11}| & -|A_{21}| & +|A_{31}| \\ -|A_{12}| & +|A_{22}| & -|A_{32}| \\ +|A_{13}| & -|A_{23}| & +|A_{33}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{*} & a_{21}^{*} & a_{31}^{*} \\ a_{12}^{*} & a_{22}^{*} & a_{32}^{*} \\ a_{13}^{*} & a_{23}^{*} & a_{33}^{*} \end{bmatrix}$$

$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5+1 = 6$, $|A_{21}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10-3 = 7$, $|A_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-3 = -5$

$|A_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5+4 = 9$, $|A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5-12 = -7$, $|A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-3 = -4$

$|A_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1-4 = -3$, $|A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1-8 = -7$, $|A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1$.

$\therefore$ $|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| = 1 \times 6 - 2 \times 9 + 3 \times (-3) = 6 - 18 - 9 = 6 - 27 = -21$.

これより.

$$A^{-1} = -\frac{1}{21} \begin{bmatrix} 6 & -7 & -5 \\ -9 & -7 & 4 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{定理}}$ （クラメールの公式）

~~n次正方行~~
連立一次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

に関して Aが正則なn次正方行列であるとき，
解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_{i-1} \overset{i}{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}_{i+1} \cdots \boldsymbol{a}_n]$$

で与えられる． ~~ここで $[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_{i-1} \boldsymbol{b} \boldsymbol{a}_{i+1} \cdots \boldsymbol{a}_n]$~~ 　第i列をbで置き換えたもの

（証明）　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A} \boldsymbol{b}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \cancel{\frac{1}{\det(A)} [\boldsymbol{a}_1^* \boldsymbol{a}_2^* \cdots \boldsymbol{a}_n^*] \boldsymbol{b}} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{1i}^* & \cdots & a_{n1}^* \\ a_{1i}^* & a_{2i}^* \cdots & a_{ni}^* \\ a_{1n}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{1}{|A|} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^* b_k}_{\text{第i列の余因子展開と等しい}} = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & \overset{}{b_1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \underset{i}{b_n} & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_{i-1} \boldsymbol{b} \boldsymbol{a}_{i+1} \cdots \boldsymbol{a}_n]$$

$\boxed{\text{注意}}$ 　解をもつためには分母 $\det(A)$ が 0 となってはダメ．

$$\det(A) \neq 0$$

例

$$\begin{bmatrix}5&1\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}5&1\\3&2\end{vmatrix}=10-3=7.$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{7}\begin{vmatrix}\boxed{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}}&\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\end{vmatrix}=\dfrac{6-2}{7}=\dfrac{4}{7} \\[2ex] x_2=\dfrac{1}{7}\begin{vmatrix}\begin{matrix}5\\3\end{matrix}&\boxed{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}}\end{vmatrix}=\dfrac{10-9}{7}=\dfrac{1}{7} \end{cases}$$

まとめ n次の正方行列 A に対して次の条件は等価である

$\det(A)\neq 0$

$\Leftrightarrow$ Aは正則

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=n$

$\Leftrightarrow$ Aは逆行列をもつ. $\quad A^{-1}=\dfrac{\tilde{A}}{|A|}$

$\Leftrightarrow$ 方程式は一意な解をもつ. $\quad x_i=\dfrac{[\cdots b\cdots]}{|A|}$

$\det(A)=0$

$\Leftrightarrow$ Aは正則ではない.

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)<n$

$\Leftrightarrow$ Aは逆行列をもたない.

$\Leftrightarrow$ 方程式 $Ax=b$ は一意な解をもたない.

(任意定数を含む解をもつ.
or
解をもたない.)

いろいろな行列式

~~Van der Monde~~

ヴァンデルモンドの行列式

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ (x_1)^2 & (x_2)^2 & & (x_n)^2 \\ (x_1)^3 & (x_2)^3 & & (x_n)^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_1)^{n-1} & (x_2)^{n-1} & & (x_n)^{n-1} \end{vmatrix}}_{n} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$$

例

$n=2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1) = -(x_1 - x_2)$$

$n=3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le 3} (x_j - x_i) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

$$= (-1)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$$

$(i,j) \in \{(1\,2), (1\,3), (2\,3)\}$

$n=4$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le 4} (x_j - x_i) = (-1)^{\frac{4 \cdot 3}{2}} =$$

$(i,j) \in \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

$$= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)$$

(証明) $V(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = \det\left((x_j)^i\right) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$

$$V(x_1 x_2 \cdots x_n) = \begin{array}{c|cccc|l} & 1 & 1 & \cdots & 1 & \\ & x_1 & x_2 & & x_n & \big) -x_1 \\ & x_1^2 & x_2^2 & & x_n^2 & \\ & \vdots & \vdots & & & \big) -x_1 \\ & x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} & \\ & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & \big) -x_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & & x_n(x_n - x_1) \\ & x_2^2(x_2 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) & & x_n^2(x_n - x_1) \\ \vdots & & & & \\ 0 & (x_2)^{n-3}(x_2 - x_1) & (x_3)^{n-3}(x_3 - x_1) & & (x_n)^{n-3}(x_n - x_1) \\ 0 & (x_2)^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & & x_n(x_n - x_1) \\ x_2^2(x_2 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) & & x_n^2(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & x_3^{n-3}(x_3 - x_1) & & x_n^{n-3}(x_n - x_1) \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots\cdots (x_n - x_1) \left.\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \\ x_2^{n-3} & x_3^{n-3} & & x_n^{n-3} \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & & x_n^{n-2} \end{vmatrix}\right\} n-1$$

$$= \prod_{1 < j \le n} (x_j - x_1) \; V(\underbrace{x_2, x_3, \cdots, x_n}_{n-1})$$

同様に

$$= \prod_{1 < j \le n} (x_j - x_1) \times \prod_{2 < j \le n} (x_j - x_2) \times V(\overbrace{x_3, x_4 \cdots x_n}^{n-2})$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} = x_n - x_{n-1}$

$$= \prod_{1 < j \le n} (x_j - x_1) \prod_{2 < j \le n} (x_j - x_2) \prod_{3 < j \le n} (x_j - x_3) \cdots \prod_{n-2 < j \le n} (x_j - x_{n-2}) \boxed{V(x_{n-1}, x_n)}$$

$$= \prod_{1 < j \le n} (x_j - x_1) \prod_{2 < j \le n} (x_j - x_2) \prod_{3 < j \le n} (x_j - x_3) \cdots \prod_{n-2 < j \le n} (x_j - x_{n-2}) \prod_{n-1 < j \le n} (x_n - x_{n-1})$$

$$= \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

//

コンパニオン行列式

$$F = \underbrace{\begin{vmatrix} a_0 & -1 & & & \\ a_1 & x & -1 & & \\ a_2 & & x & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ a_n & & & & x \end{vmatrix}}_{n+1} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_0 .$$

例

<u>$n=1$</u>

$$F = \begin{vmatrix} a_0 & -1 \\ a_1 & x \end{vmatrix} = a_0 x + a_1$$

<u>$n=2$</u>

$$F = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & \\ a_1 & x & -1 \\ a_2 & & x \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} x & -1 \\ & x \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & x \end{vmatrix}$$

$$= a_0 x^2 + (a_1 x + a_2)$$

$$= a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

<u>$n=3$</u>

$$F = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & & \\ a_1 & x & -1 & \\ a_2 & & x & -1 \\ a_3 & & & x \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} x & -1 & \\ & x & -1 \\ & & x \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} a_1 & -1 & \\ a_2 & x & -1 \\ a_3 & & x \end{vmatrix}$$

$$= a_0 x^3 + \boxed{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & \\ a_2 & x & -1 \\ a_3 & & x \end{vmatrix}}$$

$$= a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_1 x + a_3 .$$

(証明) $F(a_0 a_1 \cdots a_n ; x) = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & & \\ a_1 & x & -1 & \\ \vdots & & x \ddots & -1 \\ a_n & & & x \end{vmatrix} \Big\} n+1$ とおく.

一行目を余因子展開.

$$F(a_0 a_1 \cdots a_n) = a_0 \underbrace{\begin{vmatrix} x & -1 & & \\ & x & \ddots & -1 \\ & & & x \end{vmatrix}}_{n} - (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & & \\ a_2 & x & -1 & \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ a_n & & & x \end{vmatrix}}_{n}$$

$$F(\underbrace{a_0, a_1 \cdots, a_n}_{n+1} ; x) = a_0 x^n + F(\underbrace{a_1 \cdots a_n}_{n} ; x)$$

$$F(a_0 \cdots a_n) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + F(\underbrace{a_2 \cdots a_n}_{n-1} ; x)$$

$$= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + F(a_3, \cdots, a_n ; x)$$

$$= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x^2 + F(a_{n-1}, a_n ; x)$$

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & -1 \\ a_n & x \end{vmatrix} = a_{n-1} x + a_n$$

$$= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_0$$ //

$\boxed{\text{例}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$