

# ベクトル空間

## § 体

ある集合の元に対して四則演算が定義され、その集合内で閉じているとき、その集合を体と呼ぶ。

### 定義

(体)

集合  $K$  の任意の二つの元  $a, b$  に対して  
加法  $a+b$  と乗法  $ab$  が定義されているとする。

- (1)  $(a+b)+c = a+(b+c)$  (和の結合律)
- (2)  $\forall a + \exists 0 = a = 0+a$  (零元  $0$  の存在)
- (3)  $\forall a + \exists (-a) = 0 = (-a)+a$  (和の逆元  $-a$  の存在)
- (4)  $a+b = b+a$  (和の交換律)
- (5)  $(ab)c = a(bc)$  (積の結合律)
- (6)  $a(b+c) = ab+ac,$   
 $(a+b)c = ac+bc$  (分配律)
- (7)  $ab = ba$  (積の交換律)
- (8)  $\forall a \exists 1 = a = 1a$  (単位元  $1$  の存在)
- (9)  $\forall a \exists (a^{-1}) = 1 \quad \dots \quad a \neq 0$   
" $(a^{-1})a$ " (積の逆元  $a^{-1}$  の存在)

条件 (1)~(3) を満たすとき 集合  $K$  を 群 (group) と呼ぶ。

条件 (1)~(4) // 可換群 (commutative group) または アベル群 (Abel group)

条件 (1)~(6) // 環 (ring) と呼ぶ。

条件 (1)~(7) // 可換環 (commutative ring) と呼ぶ。

条件 (1)~(9) // 体 (field) と呼ぶ。

(特に、条件 (7) を満たさない体を 非可換体 (noncommutative field) と呼ぶ。)

### 注意

○ 零元  $0$ , 単位元  $1$  は唯一つ定まる。

和の逆元  $-a$ , 積の逆元  $a^{-1}$  は各  $a$  に対して唯一つ定まる。

(証明)

零元

$$\begin{cases} 0+a = a+0 = a \\ 0'+a = a+0' = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0+0' = 0'+0 = 0' \\ 0'+0 = 0+0' = 0 \end{cases} \Rightarrow 0' = 0$$

逆元

$$\begin{cases} a+b = b+a = 0 \\ a+b' = b'+a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b'+(a+b) = b'+0 \Rightarrow b'+\underbrace{(a+b)}_0 = b' \Rightarrow 0+b = b' \Rightarrow b = b'$$

積の場合も同様

**例** (体の具体例)

- $\mathbb{N}$  ... 自然数全体の集合  $\leftarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{加法, 乗法ともに} \\ \text{群をなさない. (和の逆元 } -a, \text{ 積の逆元 } a^{-1} \text{ が存在しない)} \end{array} \right.$   
 $\cap$   
 $\mathbb{Z}$  ... 整数全体の集合  $\leftarrow$  可換環 (積の逆元が存在しないので体とはなさない.)  
 $\cap$   
 $\mathbb{Q}$  ... 有理数全体の集合  $\leftarrow$  体  
 $\cap$   
 $\mathbb{R}$  ... 実数全体の集合  $\leftarrow$  体 (実数体  $\mathbb{R}$  と呼ぶ.)  
 $\cap$   
 $\mathbb{C}$  ... 複素数全体の集合  $\leftarrow$  体 (複素数体  $\mathbb{C}$  と呼ぶ.)

**例** (群, 環, 体の具体例)

(1)  $0$  でない実数全体の集合  $\mathbb{R}^*$  は 乗法に関して可換群 となる.

( $\because$  積  $\times$  を和  $+$  におきかえて考える.  
条件 (5), (6), (9), (7) は条件 (1), (2), (3), (4) とみなせる.)

(2)  $m \times n$  型行列全体の集合  $M(m, n)$  は 加法に関して可換群 となる.

( $\because$  (1)  $(A+B)+C = A+(B+C)$  (2)  $A+O = A$  (3)  $A+(-A) = O$  (4)  $A+B = B+A$ .)

(3)  $n \times n$  型行列全体の集合  $M(n, n)$  は 加法と乗法に関して環 となる.

( $\because$  条件 (1)~(4) に加えて (5)  $(AB)C = A(BC)$  (6)  $A(B+C) = AB+AC$ .)

(注) 集合  $M(n, n)$  は単位元  $E_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$  をもつ環である.

(注) 積に関して非可換  $AB \neq BA$  があるので  $M(n, n)$  は可換環ではない.

(4) 正則な  $n \times n$  型行列全体の集合  $GL(n)$  は 非可換体 となる.

( $\because$  (5)  $AE_n = A$  (9)  $AA^{-1} = E_n$  (7)  $AB \neq BA$ .)

**定理**

(体の性質)

体  $K$  に對して次のことを加えよう。

- (1) 条件(2)をみたす零元  $0$  は唯一つである。
- (2) 条件(3)をみたす和の逆元  $-a$  は各  $a$  に對して唯一つである。
- (3)  $-(-a) = a$
- (4)  $0a = 0$
- (5)  $(-1)a = -a$
- (6)  $(-1)(-1) = 1$
- (7)  $a(-b) = -(ab) = (-a)b$
- (8)  $(-a)(-b) = ab$
- (9)  $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ or } b = 0$
- (10)  $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$
- (11)  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

**問**

これを示せ。

(1)  $0$  と  $0'$  が零元とあり、このとき  $0+a = a+0 = a$ ,  $0'+a = a+0' = a$  加えよう。

$a = 0'$ ,  $a = 0$  とする。このとき  $0 - 0' = 0 - 0 = 0$ ,  $0' + 0 = 0 + 0' = 0$  とある。

よって  $0' = 0$  である。  $0$  は唯一つである。

(2)  $b, b'$  が  $a$  の逆元とあり

$$\begin{cases} a+b=0=b+a & \textcircled{1} \\ a+b'=0=b'+a & \textcircled{2} \end{cases} \xrightarrow{b' \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入}} \begin{cases} a+b=0 \\ (b'+a)+b=b' \end{cases} \xrightarrow{\textcircled{2}} a+b=b' \xrightarrow{\text{条件(1)}} b=b'$$

(∵ 3.11.1)

## § ベクトル空間

**定義**

(ベクトル空間)

集合  $V$  の任意の二つの元  $u, v$  と体  $K$  ( $\mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$ ) の任意の元  $a$  に対して、  
和

$$u + v \in V$$

とスカラー倍

$$au \in V$$

が定義されているとする。このとき次の条件 (1) ~ (8) を満たすならば、

$V$  を  $K$  上の ベクトル空間 (vector space) と呼ぶ。

$V$  の元を ベクトル (vector) と呼ぶ。

$$u, v, w \in V, a, b \in K (\mathbb{R} \text{ または } \mathbb{C})$$

(1)  $u + v = v + u$  (交換則)

(2)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (結合則)

(3)  $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$  ( $\leftarrow \mathbf{0}$  を  $V$  の零ベクトルと呼ぶ)

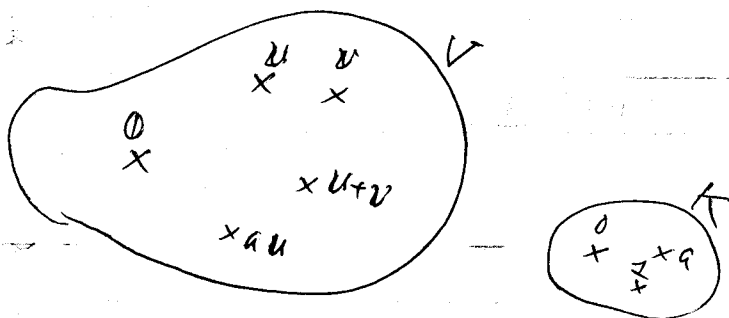
(4)  $a(bu) = (ab)u$

(5)  $(a+b)u = au + bu$

(6)  $a(u+v) = au + av$

(7)  $1u = u$

(8)  $0u = \mathbf{0}$



特にことわらな限り

$K = \mathbb{R}$  とし議論する。

例 (ベクトル空間の具体例)

(1) 列ベクトル

$$\mathbb{R}^n = \left\{ a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

条件 (1) ~ (8) をみたす  $\rightarrow \mathbb{R}^n$  は  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間

(2) 行ベクトル

$$\mathbb{R}_n = \left\{ a = [a_1, a_2, \dots, a_n] \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

条件 (1) ~ (8) をみたす  $\rightarrow \mathbb{R}_n$  は  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間

(3) 多項式

$$\mathbb{R}[x]_n = \left\{ f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \mid a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]_n, a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{和 } (f+g)(x) &= (a_0+b_0)x^0 + (a_1+b_1)x^1 + (a_2+b_2)x^2 + \dots + (a_n+b_n)x^n \\ &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n \in \mathbb{R}[x]_n \\ &\quad (c_j = a_j + b_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{スカラー倍 } (af)(x) &= (aa_0) + (aa_1)x + (aa_2)x^2 + \dots + (aa_n)x^n \\ &= c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \in \mathbb{R}[x]_n \\ &\quad (c_j = a a_j) \end{aligned}$$

条件 (1) ~ (8) をみたす  $\rightarrow \mathbb{R}[x]_n$  は  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間

(4) 連続関数

$$C(a, b) = \left\{ f(x) \mid \text{区間 } (a, b) \text{ で連続な実関数} \right\}$$

$$f(x), g(x) \in C(a, b), \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{和 } (f+g)(x) = \underbrace{f(x) + g(x)}_{\text{連続}} \in C(a, b)$$

$$\text{スカラー倍 } (\alpha f)(x) = \alpha \underbrace{f(x)}_{\text{連続}} \in C(a, b)$$

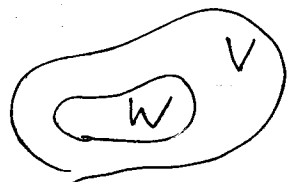
条件 (1) ~ (8) をみたす  $\rightarrow C(a, b)$  は  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間

# § 部分空間

## 定義

(部分空間)

ベクトル空間  $V$  の部分集合  $W$  が,  $V$  と同じ和とスカラー倍の定義で, ベクトル空間となるとき,  $W$  を  $V$  の 部分空間 (subspace) と呼ぶ.



## 定理

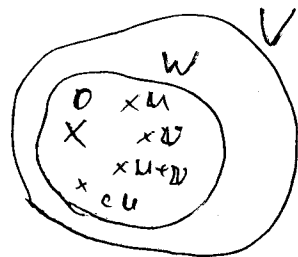
(部分空間となる必要十分条件)

ベクトル空間  $V$  の部分集合  $W$  が部分空間となる必要十分条件は次の (i) ~ (iii) をみたすことである.

(i)  $0 \in W$  ( $\leftarrow V$  の零ベクトル)

(ii)  $u, v \in W \Rightarrow u+v \in W$

(iii)  $u \in W, c \in \mathbb{R} \Rightarrow cu \in W$ .



(証明) (必要条件)  $W$  が部分空間であるならば, ベクトル空間の条件 (i) ~ (iii) をみたすから, 条件 (i) ~ (iii) をみたすのは明らか. (特に  $c \in \mathbb{R}, u \in W \Rightarrow 0 \cdot u = 0 \in W$ .)

(十分条件)  $W$  が条件 (i) ~ (iii) をみたすとき.

(i)  $\Rightarrow$  (1), (2)

(iii)  $\Rightarrow$  (4) ~ (8)

(ii)  $\Rightarrow$  (3)



例) (部分空間の具体例)

$$V = \mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0, A: m \times n \text{ 行列} \right\}$$

$W$  は  $V$  の部分空間 となる。

(証明) (i)  $A0 = 0 \Rightarrow 0 \in W$

(ii)  $x, y \in W \Rightarrow Ax = 0, Ay = 0$

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x+y \in W.$$

(iii)  $\begin{cases} x \in W \Rightarrow Ax = 0 \\ c \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$A(cx) = c(Ax) = c \cdot 0 = 0 \Rightarrow cx \in W. \quad \square$$

注意

同次形連立一次方程式  $Ax = 0$  の解全体は  $\mathbb{R}^n$  の部分空間 となる。

$W$  を方程式  $Ax = 0$  の 解空間 という。

例) (解空間は部分空間か否か)

(1)  $W = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \right\}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{同次形なので } W \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ の部分空間.}$$

(2)  $W = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases} \right\}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow Ax = b. \text{ 非同次形.}$$

$A0 = 0 \neq b$  より、 $0 \notin W$  である。

条件 (i) がないので、 $W$  は  $\mathbb{R}^3$  の部分空間ではない。

例

7743.

$$(1) W_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$(2) W_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{array} \right\}$$

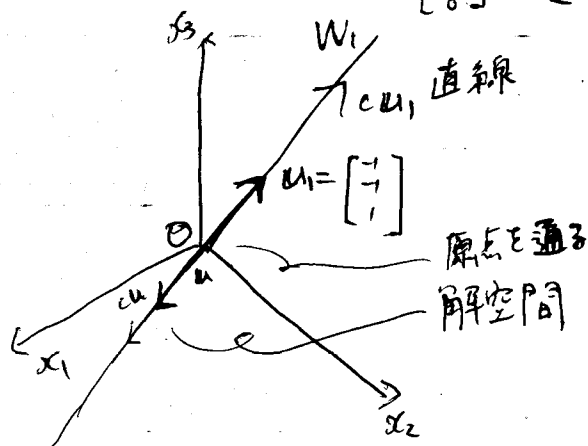
$$(1) \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

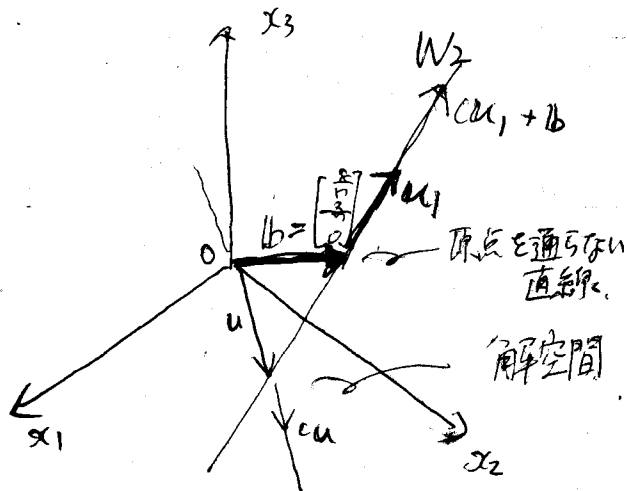
解は

$$(1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow x = c u_1, u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow x = b + c u_1, b = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ 0 \end{bmatrix}, u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$W_1$  は  $\mathbb{R}^3$  の部分空間.



$W_2$  は原点を含まない  $\mathbb{R}^3$  の部分空間ではない.

$u$  を上図のようにとると  $cu$  は解に含まれない.



例 (2次項式を3次元部分空間の具体例)

$$V = \mathbb{R}[x]_3 = \left\{ f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

(1)  $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 0, f(-1) = 0 \}$

①  $V$  の零ベクトルは  $f(x) = 0$ .

$f(x) = 0$  は  $f(\pm 1) = 0$  である。

$$\Rightarrow f(x) \in W.$$

(ii)  $f(x), g(x) \in W \Rightarrow f(\pm 1) = 0, g(\pm 1) = 0$

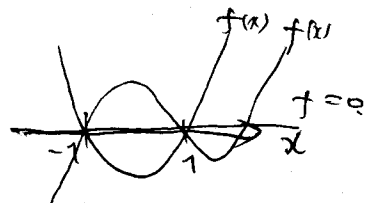
$$(f+g)(\pm 1) = f(\pm 1) + g(\pm 1) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow (f+g)(x) \in W$$

(iii)  $f(x) \in W \Rightarrow f(\pm 1) = 0$

$$c \in \mathbb{R}$$

$$(cf)(\pm 1) = cf(\pm 1) = c \times 0 = 0 \Rightarrow (cf)(x) \in W.$$

以上より, (i), (ii), (iii) より  $W$  は  $\mathbb{R}[x]_3$  の部分空間である。

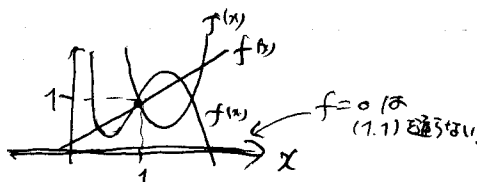


(2)  $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 1 \}$

$f(x) = 0$  は  $f(1) = 1$  である。

$$\Rightarrow f(x) = 0 \notin W.$$

よって, (1) であるから  $W$  は  $\mathbb{R}[x]_3$  の部分空間ではない。



(3)  $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid xf'(x) = 2f(x) \}$

(i)  $f=0 \Rightarrow x f'(0) = 2x f(0) \Rightarrow f=0 \in W.$   
 $\rightarrow 0 = 0$  ok.

(ii)  $f, g \in W \Rightarrow x f' = 2f, x g' = 2g$

$$x(f+g)' = x f' + x g' = 2f + 2g = 2(f+g) \Rightarrow f+g \in W.$$

(iii)  $f \in W \Rightarrow x f' = 2f$

$$c \in \mathbb{R}$$

$$x(cf)' = c x f' = 2cf = 2(cf) \Rightarrow cf \in W.$$

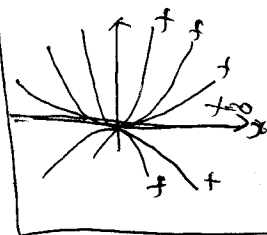
以上より (i), (ii), (iii) である。

$W$  は  $\mathbb{R}[x]_3$  の部分空間である。

$$\begin{cases} x f' = a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 \\ 2f = 2a_0 + 2a_1 x + 2a_2 x^2 + 2a_3 x^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_0 = 0, \forall a_1 \in \mathbb{R}, a_2 = 0, a_3 = 0$$

$$\Rightarrow f = a_1 x^2$$



問

(解空間か部分空間か否か)

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$(1) W = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 1 \end{array} \right\}$$

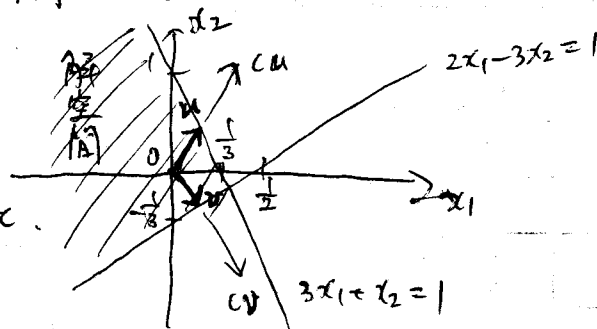
Wは  $\mathbb{R}^3$  の部分空間ではない。

①  $x_3 = 0$  のとき

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$$

右図のように  $u, v$  をとると

$cu, cv, u+v$  は  
解空間に含まれない。



$$(2) W = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{array} \right\}$$

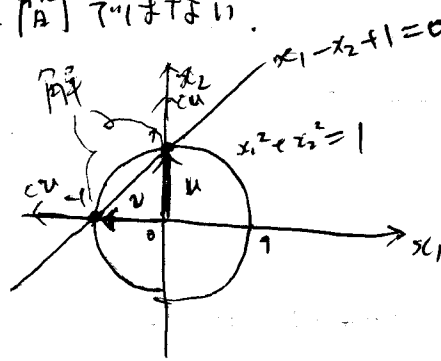
Wは  $\mathbb{R}^3$  の部分空間ではない。

②  $x_3 = 1$  のとき

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1 - x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$u, v$  を右図のようにとると

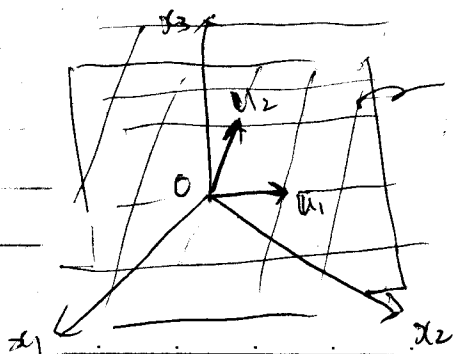
$cu, cv, u+v$  は  
解に含まれない。



$$(3) W = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \right\}$$

解.  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 u + c_2 u_2$

$$\forall c_1, \forall c_2 \in \mathbb{R}$$



解空間  
原点を含む平面

(i)  $0 \in W$

(ii)  $u, v \in W \Rightarrow u+v \in W$

(iii)  $u \in W, c \in \mathbb{R} \Rightarrow cu \in W$

Wは  $\mathbb{R}^3$  の部分空間

## § 1次独立と1次従属

**定義**

(1次結合)

ベクトル空間  $V$  のベクトル  $v$  が  $V$  のベクトル  $u_1, u_2, \dots, u_n$  を用いて

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n, \\ c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

と表される時、ベクトル  $v$  は  $u_1, u_2, \dots, u_n$  の 1次結合 または 線形結合 (linear combination) で表されるという。

**定義**

(1次関係)

ベクトル  $u_1, u_2, \dots, u_n$  が

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = \mathbf{0}, \quad c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

をみたす時、これをベクトル  $u_1, u_2, \dots, u_n$  の 1次関係 または 線形関係 という。

**注意**

(自明な1次関係)

$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  とすると、ベクトル  $u_1, \dots, u_n$  は常に1次関係

$$0 \times u_1 + 0 \times u_2 + \dots + 0 \times u_n = \mathbf{0}$$

をみたす。これを 自明な1次関係 とよぶ。

**定義**

(1次独立, 1次従属)

ベクトル  $u_1, u_2, \dots, u_n$  の1次関係

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = \mathbf{0}$$

をみたす係数  $c_1, c_2, \dots, c_n$  が自明なもの

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

のみである時、ベクトル  $u_1, u_2, \dots, u_n$  は 1次独立 または 線形独立 (linearly independent) であるという。1次独立ではない時、1次従属 または 線形従属 (linearly dependent) であるという。

**例** (1次独立の具体例)  
 $V = \mathbb{R}^n$  を考える.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in V$$

$e_1, e_2, \dots, e_n$  は1次独立である.

仮定する.

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + c_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

を対応するのは  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  のみであるから.

**例** (1次独立の具体例)

$V = \mathbb{R}[x]_n$  を考える.

$V \ni 1, x, x^2, \dots, x^n$  は1次独立なベクトルである.

( $\because$ )  $\textcircled{A}$   $c_0 \cdot 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n = 0$  より.

$c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  を定めて.

$x=0$  とおくと.  $c_0 = 0$  となる.

$\textcircled{A}$  を微分すると.

(\*\*)  $c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + n c_n x^{n-1} = 0.$

となる.  $x=0$  とおくと  $c_1 = 0$  となる.

これを繰り返すと.

$$c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$$

を得る.  $\therefore 1, x, x^2, \dots, x^n$  は1次独立である.



例) (1次独立か否か)

$$\mathbb{R}^4 \ni a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0$  より  $c_1, c_2, c_3$  を定める.

$$\rightarrow c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A c = 0$$

簡約化すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{よって} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{解は自明なもののみである.} \\ (\because \text{rank}(A) = \text{変数の個数} = 3)$$

自明なもの  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  とおける.

$a_1, a_2, a_3$  は 1次独立である. //

例 (4次独立か否か)

$$\mathbb{R}^4 \ni a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0 \text{ となる } c_1, c_2, c_3 \text{ の存在を調べる}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A c = 0$$

簡約化する。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より

$$\begin{cases} c_1 = 2c_3 \\ c_2 = -3c_3 \\ c_3 = c_3 \end{cases} \quad \forall c_3 \in \mathbb{R} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{変数の個数} - \text{rank}(A) \\ = \text{任意定数の個数} \\ = 3 - 2 = 1 \end{array}$$

以上より

$$(2c_3) a_1 + (-3c_3) a_2 + (c_3) a_3 = 0$$

$$2a_1 - 3a_2 + a_3 = 0$$

よって  $a_1, a_2, a_3$  は 1次従属である。 //

# 定理

$\forall v_1, v_2, \dots, v_n$

$v_1, v_2, \dots, v_n$  が 1 次従属  $\Leftrightarrow v_1, v_2, \dots, v_n$  のうち少なくとも 1 個のベクトルは、他の  $n-1$  個のベクトルの 1 次結合で表せる。

(証明)

(必要条件)  $v_1, v_2, \dots, v_n$  が 1 次従属であれば、1 次関係

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$$

をみたす係数  $c_j$  は自明なもの  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  以外にも存在する。

例として  $c_1 \neq 0$  とすると、

$$v_1 = \left(-\frac{c_2}{c_1}\right)v_2 + \left(-\frac{c_3}{c_1}\right)v_3 + \dots + \left(-\frac{c_n}{c_1}\right)v_n$$

となる。  $v_1$  は  $v_2, v_3, \dots, v_n$  の 1 次結合で表せる。

他の係数  $c_j \neq 0$  の場合でも同様。

(十分条件)  $v_1$  が他の  $n-1$  個のベクトルの 1 次結合で表せるとすると、

$$v_1 = c_2 v_2 + c_3 v_3 + \dots + c_n v_n$$

となる。これをより

$$(-1)v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \dots + c_n v_n = 0$$

となる。  $c_1 = -1$  とおけば、

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \dots + c_n v_n = 0$$

を得る。  $c_1 \neq 0$  であるから、自明ではない  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  が存在する。

よって  $v_1, v_2, \dots, v_n$  は 1 次従属である。



## 定理

$\forall \exists u_1, u_2, \dots, u_n, u$

$u_1, u_2, \dots, u_n$  は 1次独立

$u_1, u_2, \dots, u_n, u$  は 1次従属

$$\Rightarrow u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n \quad (c_j \in \mathbb{R})$$

(証明)

1次関係

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n + c u = 0$$

を考える。  $u_1, u_2, \dots, u_n, u$  は 1次従属なので、  $c_1, c_2, \dots, c_n, c$  のうち少なくとも

一つは 0 でないものがある。

もし  $c = 0$  とすると、  $c_1, c_2, \dots, c_n$  のうち少なくとも一つは 0 でない。

しかし、  $c = 0$  とおくと。

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0$$

となり、  $u_1, u_2, \dots, u_n$  は 1次独立であることから、  $c_j$  はすべて 0 となるはずであり、

矛盾がある。よって  $c \neq 0$  である。

つまり

$$u = \left(-\frac{c_1}{c}\right) u_1 + \left(-\frac{c_2}{c}\right) u_2 + \dots + \left(-\frac{c_n}{c}\right) u_n = \tilde{c}_1 u_1 + \tilde{c}_2 u_2 + \dots + \tilde{c}_n u_n$$

となる。  $u$  は  $u_1, u_2, \dots, u_n$  の 1次結合で表せる。





# § 1次結合の記法

## 定義

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad V \ni u_1, u_2, \dots, u_m, \quad V \ni v_1, v_2, \dots, v_n$$

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, \dots, v_n) &= (u_1, u_2, \dots, u_m) A = (u_1, u_2, \dots, u_m) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= (a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{m1}u_m, \quad a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{m2}u_m, \\ &\quad \dots, \quad a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{mn}u_m) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{m1}u_m \\ v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{m2}u_m \\ \vdots \\ v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{mn}u_m \end{cases}$$

## 例

$$\begin{cases} v_1 = 3u_1 + u_2 \\ v_2 = 2u_1 - u_2 \\ v_3 = u_1 + 4u_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, v_3) &= (3u_1 + u_2, 2u_1 - u_2, u_1 + 4u_2) \\ &= (u_1, u_2) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= (u_1, u_2) A \end{aligned}$$

↑  
1次元空間

↑  
あたかも  
0次元空間の基底  
を取り出す  
→  
1次元空間の基底  
を取り出す

**定理**

$$V \ni v_1, v_2, \dots, v_n \quad V \ni u_1, u_2, \dots, u_m$$

- (1)  $v_1, v_2, \dots, v_n$  の各ベクトルは  $u_1, u_2, \dots, u_m$  の 1 次結合で表れる。  
 (2)  $n > m$ .
- }  $\Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_n$  は 1 次従属である。

(証明) 条件 (1), (2) のとき 一次関係  $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$  をみたす 非自明な  $c_1, c_2, \dots, c_n$  が存在することを示す。

条件 (1) より

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{m1}u_m \\ v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{m2}u_m \\ \vdots \\ v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{mn}u_m \end{cases}$$

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1, u_2, \dots, u_m) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$= (u_1, u_2, \dots, u_m) A \quad \text{ただし } A = [a_{ij}]_{m \times n}$

と書ける。一次関係は

$$0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = (v_1, v_2, \dots, v_n) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = (v_1, v_2, \dots, v_n) C$$

$$= (u_1, u_2, \dots, u_m) \underbrace{A C}_0$$

ただし  $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$

とある。  $AC=0$  が成り立つを示す。 かわち方程式  $AX=0$  の解として、

自明ではない解  $C$  が存在するかを示す。 方程式  $AX=0$  は同次形であるので常に解をもち、

非自明な解であるためには、任意定数を含む解でなければならず、任意定数の個数は

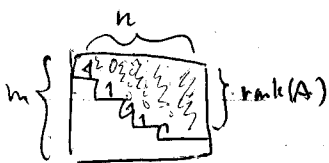
$$\text{任意定数の個数} = \text{変数の個数} - \text{rank}(A) = n - \text{rank}(A)$$

である。行列の階数は行の個数を超えないので  $m \geq \text{rank}(A)$  であり、条件 (2)  $n > m$  より

$$\text{任意定数の個数} = n - \text{rank}(A) \geq n - m > 0$$

を得る。任意定数は 1 個以上あるので、非自明解をもち、よって  $C \neq 0$  が存在する。

$C \neq 0$  より  $v_1, v_2, \dots, v_n$  は 1 次従属である。



例

$$V = \mathbb{R}^2 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$v_1, v_2, v_3$  は 1 次従属である。

(証明) まず  $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

とおく。

$$\begin{cases} v_1 = 2e_1 + e_2 \\ v_2 = 4e_1 + 3e_2 \\ v_3 = 5e_1 - e_2 \end{cases}$$

$$(v_1, v_2, v_3) = (e_1, e_2) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

と書ける。  $n = 3 > m = 2$  となるから  $v_1, v_2, v_3$  は 1 次従属である。

実際  $v_1, v_2, v_3$  の非自明な 1 次関係を求めた。  $Ac = 0$  より

簡約化して  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & -7/2 \end{bmatrix}$

とある。方程式  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 19/2 \\ 0 & 1 & -7/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0$  を解くと  $\begin{cases} c_1 = -\frac{19}{2}c_3 \\ c_2 = \frac{7}{2}c_3 \\ c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$  とある。

これは 1 次関係は  $(v_1, v_2, v_3)c = 0$  より

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$$

$$-\frac{19}{2}c_3 v_1 + \frac{7}{2}c_3 v_2 + c_3 v_3 = 0$$

$$19v_1 - 7v_2 - 2v_3 = 0$$

とある。確認してみよう。

$$19v_1 - 7v_2 - 2v_3 = 19(2e_1 + e_2) - 7(4e_1 + 3e_2) - 2(5e_1 - e_2)$$

$$= (19 \times 2 - 7 \times 4 - 2 \times 5)e_1 + (19 - 7 \times 3 - 2 \times (-1))e_2$$

$$= (38 - 28 - 10)e_1 + (19 - 21 + 2)e_2$$

$$= 0 \times e_1 + 0 \times e_2$$

$$= 0$$

とあり、O.K.

(三注)  $n$  次元空間  $\mathbb{R}^m$   $\supset v_1, v_2, \dots, v_n$ ,  
 $n > m \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_n$  は 1 次従属。

**定理**

$$\forall u_1, u_2, \dots, u_m, A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1, u_2, \dots, u_m \text{ は } \mathbb{F}\text{-} \text{独立} \\ (u_1, u_2, \dots, u_m) A = (0, 0, \dots, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow A = 0$$

(証明)  $(u_1, u_2, \dots, u_m) A = (0, 0, \dots, 0)$  より

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{m1}u_m = 0 \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{m2}u_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{mn}u_m = 0 \end{cases}$$

と成る。各式は  $u_1, \dots, u_m$  の 1次関係と成っている。  
 $u_1, u_2, \dots, u_m$  は  $\mathbb{F}$ -独立なので、係数は自明なものに限る。  
 よって  $a_{ij} = 0$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ) である。よって  $A = 0$  を得る。

**注意**

特に  $A = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{m \times 1}$  のときは  $(u_1, u_2, \dots, u_m) 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$  と成る。

**定理**

$$(u_1, u_2, \dots, u_m) A = (u_1, u_2, \dots, u_m) B \Rightarrow A = B$$

(証明)

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, \dots, u_m) A &= (u_1, u_2, \dots, u_m) B \\ (u_1, u_2, \dots, u_m) A - (u_1, u_2, \dots, u_m) B &= (0, 0, \dots, 0) \\ (u_1, u_2, \dots, u_m) (A - B) &= (0, 0, \dots, 0) \\ \Rightarrow A - B &= 0 \\ \Rightarrow A &= B \end{aligned}$$

例1

$$\begin{cases} v_1 = u_1 - u_2 + 3u_3 \\ v_2 = 2u_1 - u_2 + 6u_3 + u_4 \\ v_3 = 2u_1 - 2u_2 + u_3 - u_4 \\ v_4 = u_1 - u_3 + 3u_4 \end{cases}$$

$u_1, u_2, u_3, u_4$  は1次独立.

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = (u_1, u_2, u_3, u_4) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}}_A = (u_1, u_2, u_3, u_4) A$$

$v_1, \dots, v_4$  の1次関係

$$0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 = (v_1, v_2, v_3, v_4) \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}}_c = (v_1, v_2, v_3, v_4) c$$

$$= (u_1, u_2, u_3, u_4) \underbrace{A c}_c = (u_1, u_2, u_3, u_4) \tilde{c} = 0$$

$u_1, u_2, u_3, u_4$  は1次独立であるから  $\tilde{c} = 0$  と成り立つ。

よって  $A c = \tilde{c} = 0$  が成り立つ。この解を

簡約化して  $A \rightarrow E$ ,  $\text{rank}(A) = 4$  あり。

解は自明な  $c = 0$  に限る。

$c = 0$  あり。  $v_1, v_2, v_3, v_4$  は1次独立である。

③

例

$$\begin{cases} v_1 = 2u_1 + u_2 - u_3 + u_4 \\ v_2 = u_1 - u_2 + 2u_3 + u_4 \\ v_3 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \\ v_4 = 2u_1 + u_2 - 2u_3 - u_4 \end{cases}$$

$u_1, u_2, u_3, u_4$  は 1 次独立

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = (u_1, u_2, u_3, u_4) \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}}_A = (u_1, u_2, u_3, u_4) A$$

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 = (v_1, v_2, v_3, v_4) \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}}_c = (u_1, u_2, u_3, u_4) c \\ &= (u_1, u_2, u_3, u_4) \underbrace{A}_c c = (u_1, u_2, u_3, u_4) \underbrace{Ac}_c = 0 \end{aligned}$$

$u_1, u_2, u_3, u_4$  は 1 次独立であるから  $Ac = 0$  である。よって  $Ac = \vec{0} = 0$  を得る。

これを解く。簡約化して

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(A) = 3 < 4$$

$$Ac = 0 \text{ は } \begin{cases} c_1 + c_4 = 0 \\ c_2 - c_4 = 0 \\ c_3 + c_4 = 0 \end{cases} \text{ とおける。}$$

よって、 $c_1 = -c_4, c_2 = c_4, c_3 = -c_4, \forall c_4 \in \mathbb{R}$  である。

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & -c_4 v_1 + c_4 v_2 - c_4 v_3 + c_4 v_4 = 0 \\ & v_1 - v_2 + v_3 - v_4 = 0 \end{aligned}$$

を得る。 $v_1, v_2, v_3, v_4$  は 1 次従属である。

(3)

## §-ベクトルの1次独立な最大個数

**定義** (ベクトルの1次独立な最大個数)

ベクトルの集合  $X$  に含まれるある  $r$  個のベクトルが1次独立であり、 $X$  に含まれる任意の  $r+1$  個のベクトルが1次従属であるとき、 $r$  を集合  $X$  のベクトルの1次独立な最大個数という。

**定理**

ベクトルの集合  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$

$v_1, \dots, v_n$  の各ベクトルが  $u_1, \dots, u_m$  の1次結合で表せる  $\Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$  の1次独立な最大個数  $\leq \{u_1, \dots, u_m\}$  の1次独立な最大個数

(証明)  $v_1, \dots, v_n$  は  $u_1, \dots, u_m$  の1次結合で表せるので

$$v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1, \dots, u_m) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (u_1, \dots, u_m) A$$

と書ける。  $u_1, u_2, \dots, u_m$  の1次独立な最大個数を  $r$  個とする。

$u_1, u_2, \dots, u_m$  のうち  $u_1, \dots, u_r$  を1次独立な  $r$  個のベクトルとする。

このとき

$$\begin{aligned} &u_1, \dots, u_r, u_{r+1} \\ &u_1, \dots, u_r, u_{r+2} \\ &\vdots \\ &u_1, \dots, u_r, u_m \end{aligned}$$

(  $u_1, \dots, u_r$  よりほかの1次独立な場合は )  
番号を入れかえる。

はそれぞれ1次従属と存在。定理 4.2.2 より  $u_{r+1}, \dots, u_m$  は  $u_1, \dots, u_r$  の1次結合でそれぞれ表される。すなわち

$$\left\{ \begin{aligned} u_{r+1} &= \sum_{i=1}^r b_{i,r+1} u_i \\ u_{r+2} &= \sum_{i=1}^r b_{i,r+2} u_i \\ &\vdots \\ u_m &= \sum_{i=1}^r b_{i,m} u_i \end{aligned} \right.$$

と存在。  $u_1 = u_1, u_2 = u_2, \dots, u_r = u_r$  と合わせて書き直すと、

$$\begin{aligned}
 (u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m) &= (u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m) \begin{bmatrix} \overbrace{1 \dots 1}^r & \overbrace{b_{1,r+1} \dots b_{1,m}}^{m-r} \\ \vdots & \vdots \\ \overbrace{b_{r,r+1} \dots b_{r,m}}^{m-r} & \vdots \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} r \\ \} m-r \end{array} \right\} m \\
 &= (u_1, \dots, u_m) \begin{bmatrix} E_r & B \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

よしてより、 $v_1, \dots, v_n$  は

$$\begin{aligned}
 (v_1, \dots, v_n) &= (u_1, \dots, u_n) A \\
 &= (u_1, \dots, u_n) \begin{bmatrix} \overbrace{E_r}^r & \overbrace{B}^{m-r} \\ \hline 0_{r,m-r} & 0_{m-r,r+r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overbrace{A_{11}}^r & \overbrace{A_{12}}^{m-r} \\ \hline \overbrace{A_{21}}^r & \overbrace{A_{22}}^{m-r} \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} r \\ \} m-r \end{array} \right\} n \\
 &= (u_1, \dots, u_n) \begin{bmatrix} \overbrace{A_{11} + BA_{21}}^r & \overbrace{A_{12} + BA_{22}}^{m-r} \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} r \\ \} m-r \end{array} \right\} n \\
 &= (u_1, \dots, u_n) \begin{bmatrix} c_{11} \dots c_{1r} & c_{1,r+1} \dots c_{1,n} \\ \vdots & \vdots \\ c_{r1} \dots c_{rn} & c_{r,m+1} \dots c_{r,n} \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} r \\ \} m-r \end{array} \right\} n
 \end{aligned}$$

より

$$v_j = \sum_{i=1}^r c_{ij} u_i \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

となる。 $v_1, \dots, v_n$  の各ベクトルは  $r$  個のベクトル  $u_1, \dots, u_r$  の 1 次結合で書ける。

定理 4.2.3 より  $\{v_1, \dots, v_n\}$  のうち  $r+1$  個以上のベクトルをぬき出すと、

それは、1 次従属となる。よって、1 次独立となるベクトルの個数は  $r+1$  個未満である。以上より、証明された。





**定理**

$\{u_1, \dots, u_m\}$  の 1 次独立な最大個数  $= r$

$\Leftrightarrow$   $u_1, \dots, u_m$  のなかに  $r$  個の 1 次独立なベクトルがある。  
他の  $m-r$  個のベクトルはこの  $r$  個のベクトルの 1 次結合で表せる。

(証明)

( $\Rightarrow$ )  $u_1, \dots, u_m$  のうち 1 次独立な  $r$  個のベクトルを例えは

$$u_1, \dots, u_r$$

と取り、このとき

$$u_{r+1}, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m \quad (i = r+1, r+2, \dots, m)$$

は 1 次従属であるから、定理 4.2.2 より  $u_i$  は  $u_1, \dots, u_r$  の 1 次結合で表せる。

( $\Leftarrow$ ) 例えは  $u_1, \dots, u_r$  は 1 次独立な  $r$  個のベクトルであり、他の  $m-r$  個のベクトル  $u_{r+1}, \dots, u_m$  は  $u_1, \dots, u_r$  の 1 次結合で書けるとする。このとき

$r \leq \{u_1, \dots, u_m\}$  の 1 次独立な最大個数  
である。また、 $u_1, \dots, u_m$  は

$$(u_1, u_2, \dots, u_m) = (u_1, \dots, u_r) \begin{bmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad \dots \quad 1}^r & \overbrace{a_{1,r+1} \quad a_{1,r+2} \quad \dots \quad a_{1,m}}^{m-r} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{0 \quad \dots \quad 0 \quad 1}_{m-r} & \underbrace{a_{r,r+1} \quad \dots \quad a_{r,m}}_{m-r} \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}} \right\} m$$

のように  $u_1, \dots, u_r$  の 1 次結合で表せるので、定理 4.3.1 より

$$\begin{aligned} \{u_1, \dots, u_m\} \text{ の 1 次独立な最大個数} \\ \leq \{u_1, \dots, u_r\} \text{ の 1 次独立な最大個数} = r \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $\{u_1, \dots, u_m\}$  の 1 次独立な最大個数は  $r$  である。



例

$$V = \mathbb{R}^4 \ni a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, a_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  の一次独立なベクトルの最大個数を求めよ。  
 一次独立なベクトルの組を一つ求めよ。  
 その他のベクトルをこれらのベクトルの一次結合で表せ。

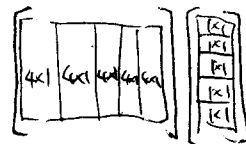
一次関係

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + c_4 a_4 + c_5 a_5 = 0$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = 0$$

ここで、 $a_j$  は列ベクトルであることを注意すると

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = 0$$



行列の分割の積

$$A C = 0$$

と表される。方程式  $Ax=0$  を求めることで

一次関係の係数  $c$  が定まる。

行列  $A$  を簡約化すると  $A \rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5]$

となる。方程式  $Bx=0$  の解もまた  $c$  となる。

すなわち  $a_1, a_2, \dots, a_5$  の一次関係

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_5 a_5 = 0$$

と  $b_1, b_2, \dots, b_5$  の一次関係

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_5 b_5 = 0$$

は同じものとなる。このことは簡約化を  $B=PA$  ( $P$  は基本変形を行列の積で表わすときの行列) と表せば、  
 ( $P$  は正則)

$$B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_5] = PA = P[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_5] = [Pa_1 \ Pa_2 \ \dots \ Pa_5]$$

であるので、

$$\begin{cases} b_j = P a_j & (j=1, 2, \dots, 5) \\ a_j = P^{-1} b_j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_5 a_5 \\ &= c_1 P^{-1} b_1 + c_2 P^{-1} b_2 + \dots + c_5 P^{-1} b_5 \\ &= P^{-1} (c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_5 b_5) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P 0 = P P^{-1} (c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_5 b_5)$$

$$\Rightarrow 0 = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_5 b_5$$

が成り立つ。同様にして、逆も成り立つ。よって、一次関係を考えたときは  $a_1, \dots, a_5$  でも  $b_1, \dots, b_5$  でも、どちらで議論してもよい。

$b_1, b_2, b_4$  に着目すると

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であり、これらは  $\mathbb{R}^4$  の基本ベクトルであり、一次独立である。

$\mathbb{R}^4$  の任意のベクトルは基本ベクトルの一次結合で表されるので、

$$b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -b_1 + b_2$$

$$b_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2b_1 - b_2 + b_4$$

となる。これらより、 $\{b_1, b_2, \dots, b_5\}$  の一次独立な最大個数は  $r=3$  である。

一次独立なベクトルは  $b_1, b_2, b_4$  であり、その他のベクトルは

$$b_3 = -b_1 + b_2, \quad b_5 = 2b_1 - b_2 + b_4$$

と一次結合で表される。

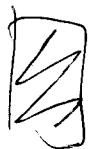
よって、 $\{a_1, a_2, \dots, a_5\}$  についても同じ一次関係が成り立つので、

一次独立な最大個数は  $r=3$  であり、

一次独立なベクトルは  $a_1, a_2, a_4$  であり、その他のベクトルは

$$a_3 = -a_1 + a_2, \quad a_5 = 2a_1 - a_2 + a_4$$

が成り立つ。



前の例題をまとめると.

$$\mathbb{R}^n \ni a_1, a_2, \dots, a_n.$$

1次独立な最大個数  $r$  は?

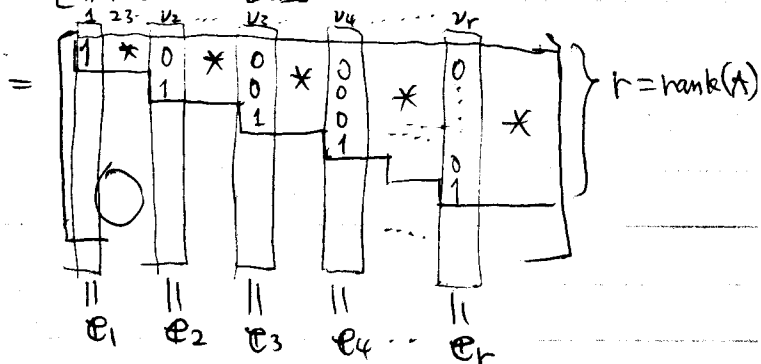
1次独立なベクトルの組の一例は?

その他のベクトルを1次結合で表すには?

$$A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \xrightarrow{\text{簡約化}} B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]$$

$$(B = PA \text{ とおく.})$$

$$(b_j = p a_j)$$



$$\{1, 2, 3, \dots, n\} = \{1, v_2, v_3, \dots, v_r\} + \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-r}\} \leftarrow \{1, 2, \dots, n\} \text{を } r \text{個と } n-r \text{個の組に分ける.}$$

$b_1, b_2, \dots, b_n$  のうち  $r$  個は  $b_1 = e_1, b_{v_2} = e_2, \dots, b_{v_r} = e_r$  となり1次独立である。残りの  $n-r$  個のベクトル  $b_{\mu_1}, b_{\mu_2}, \dots, b_{\mu_{n-r}}$  は

$$b_{\mu_i} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + c_r \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_r e_r$$

$$= c_1 b_1 + c_2 b_{v_2} + \dots + c_r b_{v_r} \quad (i=1, 2, \dots, n-r)$$

となり, 1次独立なベクトル  $b_1, b_{v_2}, \dots, b_{v_r}$  の1次結合で表せる。

よって  $c_1 b_1 + c_2 b_{v_2} + c_3 b_{v_3} + \dots + c_r b_{v_r} = 0$  をみたす係数  $c_1, \dots, c_r$  は自明なものだけである。(  $b_j = p a_j$  より)

$$c_1 p a_1 + c_2 p a_{v_2} + c_3 p a_{v_3} + \dots + c_r p a_{v_r} = 0$$

$$p (c_1 a_1 + c_2 a_{v_2} + c_3 a_{v_3} + \dots + c_r a_{v_r}) = 0$$

$$\underbrace{p p^{-1}}_E (c_1 a_1 + c_2 a_{v_2} + c_3 a_{v_3} + \dots + c_r a_{v_r}) = \underbrace{p 0}_{=0}$$

$$\Rightarrow c_1 a_1 + c_2 a_{v_2} + c_3 a_{v_3} + \dots + c_r a_{v_r} = 0$$

よって  $a_1, a_{v_2}, \dots, a_{v_r}$  の1次関係も自明なものに限る。

その基底は

$$b_{\mu_i} = c_1 b_{v_1} + c_2 b_{v_2} + \dots + c_r b_{v_r} \quad (i=1, 2, \dots, n-r)$$

$$P a_{\mu_i} = c_1 P a_{v_1} + c_2 P a_{v_2} + \dots + c_r P a_{v_r}$$

$$P a_{\mu_i} = P (c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_r e_r)$$

$$\underbrace{P P^{-1}}_{\mathbb{E}} a_{\mu_i} = \underbrace{P^{-1} P}_{\mathbb{E}} C$$

$$a_{\mu_i} = c_1 a_{v_1} + c_2 a_{v_2} + \dots + c_r a_{v_r}$$

よって、 $a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, \dots, a_{\mu_{n-r}}$  は  $a_{v_1}, a_{v_2}, \dots, a_{v_r}$  の一次結合で表される。

以上より、 $a_{v_1}, a_{v_2}, \dots, a_{v_r}$  の一次独立基底の最大個数は  $r = \text{rank}(A)$  である。

# 定理

$\text{rank}(A) = A$  の列ベクトルの 1 次独立な最大個数  
 $= A$  の行ベクトルの 1 次独立な最大個数.

(証明) 列ベクトルについては前頁で証明済.  
 行ベクトルについて示す.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} B = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & * & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & * \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 1 & * \\ & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left. \vphantom{B} \right\} S = \begin{bmatrix} |b_1 \\ |b_2 \\ \vdots \\ |b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |b_1 \\ |b_2 \\ \vdots \\ |b_s \\ |0 \\ \vdots \\ |0 \end{bmatrix} \left. \vphantom{S} \right\} S$$

とあり、 $B$  の零ベクトルではない行ベクトルの個数を  $S$  とする.

零ベクトルではない行ベクトル  $|b_1, |b_2, \dots, |b_s$  は 1 次独立である. なぜなら.

$$c_1 |b_1 + c_2 |b_2 + \dots + c_s |b_s = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_2 & \dots & c_3 & \dots & c_s & \dots \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \begin{matrix} \uparrow \\ \text{±成分の位置} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_s = 0$$

をみたすからである. よって  $B$  の全ての行ベクトル  $|b_1, |b_2, \dots, |b_m$  の 1 次独立な最大個数は  $S = \text{rank}(B) = \text{rank}(A)$  である.

$A$  の行ベクトル  $a_1, a_2, \dots, a_m$  の 1 次独立な最大個数を  $r$  とする.

$A$  の行に関して基本変形を繰り返して  $B$  が得られるので:

$B$  の行ベクトルは  $A$  の行ベクトルの 1 次結合

$$|b_i = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_m a_m \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

で表される. よって、 $r \geq S$  が成り立つ.

一方、 $B$  に対して行の基本変形を繰り返して行なうことで  $A$  を得ることもできる. よって、 $A$  の行ベクトルは  $B$  の行ベクトルの 1 次結合

$$a_i = c_1 |b_1 + c_2 |b_2 + \dots + c_m |b_m \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

で表される. よって、 $r \leq S$  が成り立つ.

以上より、 $r \geq S, r \leq S \Rightarrow r = S = \text{rank}(B) = \text{rank}(A)$  が得られる.



## 定理

$n$ 次正方行列  $A$  に対して

$A$  の  $n$  個の列ベクトルは 1 次独立である。

$\Leftrightarrow A$  の  $n$  個の行ベクトルは 1 次独立である。

$\Leftrightarrow A$  は正則行列である ( $A$  は逆行列をもつ。)

$\Leftrightarrow \text{rank}(A) = n$ 。

$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ 。

(証明)  $A$  の全ての列(行)ベクトルが 1 次独立である:

$\text{rank}(A) = n$  となり、これは前定理より明らか。

$\text{rank}(A) = n \Leftrightarrow A$  は正則  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$  になり、これは

正方行列の性質より明らか。



**定理**

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1, u_2, \dots, u_m)A$$

$$A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] : m \times n \text{ 行列}$$

$u_1, u_2, \dots, u_m$  は 1次独立.

(1)  $v_1, v_2, \dots, v_n$  の 1次関係と  $a_1, a_2, \dots, a_n$  の 1次関係は同じ.

(2)  $m=n$  のとき

$v_1, v_2, \dots, v_n$  が 1次独立  $\Leftrightarrow A$  が正則行列.

(証明)

$$(1) \ 0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = (v_1, v_2, \dots, v_n) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = (v_1, v_2, \dots, v_n) c$$

$$= (u_1, u_2, \dots, u_m) \underbrace{A}_{\substack{\downarrow \\ c}} = (u_1, u_2, \dots, u_m) \tilde{c}$$

$u_1, \dots, u_m$  は独立なので  $\tilde{c} = 0$ . よって.

$$0 = Ac$$

$$= [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n.$$

(2)  $m=n$  のとき  $A$  は正則行列.

$v_1, \dots, v_n$  が 1次独立  $\Leftrightarrow a_1, \dots, a_n$  が 1次独立

$\Leftrightarrow A$  が正則行列.





例)

$$\begin{cases} f_1(x) = 1 + x + 3x^2 \\ f_2(x) = 1 + 2x - x^3 \\ f_3(x) = 1 + 3x - 3x^2 - 2x^3 \\ f_4(x) = -2 - 4x + x^2 - x^3 \\ f_5(x) = -1 - 4x + 7x^2 \end{cases}$$

$\mathbb{R}[x]_3 \ni f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$

$\mathbb{R}[x]_3 \ni 1, x, x^2, x^3$

$1, x, x^2, x^3$  は 1 次独立なベクトルである。

$f_1, \dots, f_5$  と  $1, x, x^2, x^3$  の関係は、

$$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = (1, x, x^2, x^3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = (1, x, x^2, x^3) A.$$

$f_1, \dots, f_5$  の 1 次関係は、

$$\begin{aligned} \phi &= c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 + c_5 f_5 = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = (f_1, \dots, f_5) \underline{c} \\ &= (1, x, x^2, x^3) \underbrace{A \underline{c}}_{\underline{0}} = (1, x, x^2, x^3) \underline{0}. \end{aligned}$$

$1, x, x^2, x^3$  は 1 次独立なので、 $\underline{0} = \underline{0}$  であり、 $A \underline{c} = \underline{0}$  かつなり立ち、

$A$  を簡約化して  $B = [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$  を得るとする。これを  $B = PA$  とおくと、

$$\begin{aligned} A \underline{c} &= \underline{0} \\ \rightarrow \underbrace{PA}_{B} \underline{c} &= \underbrace{P \underline{0}}_{\underline{0}} \\ \rightarrow B \underline{c} &= \underline{0} \end{aligned}$$

かつなり立ち。よくなる。  $f_1, \dots, f_5$  と  $a_1, \dots, a_5$  と  $b_1, \dots, b_5$  の 1 次関係は  $A \underline{c} = \underline{0}$  かつなり立ち。

具体的に  $B$  を計算すると、

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]$$

となる。

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e_2, \quad b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -b_1 + 2b_2, \quad b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_3$$

$$b_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2b_1 - b_2 + b_4$$

加成り立つから、 $b_1, b_2, b_4$  は 1 次独立である。 $b_3, b_5$  は  $b_1, b_2, b_4$  の 1 次結合で表される。  
よって、 $b_1, \dots, b_5$  の 1 次独立な最大個数は  $r=3$  である。

A の列ベクトルについても同じ 1 次関係が成り立つので、 $a_1, a_2, a_4$  は 1 次独立であり、  
残りは  $a_3 = -a_1 + 2a_2$ ,  $a_5 = 2a_1 - a_2 + a_4$  と 1 次結合で表される。  
よって、 $a_1, a_2, \dots, a_5$  の 1 次独立な最大個数は、 $r=3$  となる。

$f_1, \dots, f_5$  についても同じ 1 次関係が成り立つので、 $f_1, f_2, f_4$  は 1 次独立である。  
残りは  $f_3 = -f_1 + 2f_2$ ,  $f_5 = 2f_1 - f_2 + f_4$  と 1 次結合で表される。  
よって、 $f_1, \dots, f_5$  の 1 次独立な最大個数は  $r=3$  である。



## § ベクトル空間の基底

**定義**

(ベクトル空間の生成)

ベクトル空間  $V$  の全てのベクトルが  $u_1, \dots, u_n$  の1次結合で表されるとき、  
ベクトル  $u_1, u_2, \dots, u_n$  が  $V$  を生成するという。

**例**

(ベクトル空間の生成の具体例)

$$\mathbb{R}^n \ni \vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + a_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$$

基本ベクトル  $e_1, e_2, \dots, e_n$  は  $\mathbb{R}^n$  を生成する。

**定義**

(ベクトルの基底)

$$V \supset \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

- (1)  $u_1, u_2, \dots, u_n$  は1次独立
- (2)  $u_1, u_2, \dots, u_n$  は  $V$  を生成する



$\{u_1, \dots, u_n\}$  は  $V$  の 基 または 基底 (basis) である。

**例**

(ベクトルの基底の具体例)

$$\mathbb{R}^n \supset \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \text{ 基本ベクトル}$$

- (1)  $e_1, \dots, e_n$  は1次独立
- (2)  $e_1, \dots, e_n$  は  $\mathbb{R}^n$  を生成

$\Rightarrow \{e_1, \dots, e_n\}$  は  $\mathbb{R}^n$  の基底である。

$e_1, \dots, e_n$  を  $\mathbb{R}^n$  の 標準基底 という。

注意

ベクトル空間の基底の取り方は一意ではない。

定理

(ベクトル空間の基底の個数の一意性)

ベクトル空間の基底の個数は、  
基底の取り方によらず一定である。

(証明)

$V \ni u_1, \dots, u_m$

$V \ni v_1, \dots, v_n$

$u_1, \dots, u_m$  と  $v_1, \dots, v_n$  が共に  $V$  の基底となる。

$v_1, \dots, v_n$  は  $u_1, \dots, u_m$  の1次結合で書ける。

$n > m$  と仮定  $\Rightarrow v_1, \dots, v_n$  は1次従属  $\Rightarrow v_1, \dots, v_n$  が基底であることと矛盾。

$\Rightarrow n \leq m$

同様に、 $u_1, \dots, u_m$  は  $v_1, \dots, v_n$  の1次結合で書ける。

$m > n$  と仮定  $\Rightarrow \dots \Rightarrow m \leq n$

以上より、 $n \leq m$ 、 $n \geq m$  となり  $n = m$  を得る。

すなわち基底の個数は一定。

□

## § ベクトル空間の次元

**定義**

(ベクトル空間の次元)

ベクトル空間  $V$  の基底の個数を  $V$  の次元 (dimension) といひ、 $\dim(V)$  と書き表す。特に  $K$  上のベクトル空間  $V$  の次元を  $K$  上の次元といひ、 $\dim_K(V)$  と書く。

**注意**

零ベクトルのみからなるベクトル空間を 零ベクトル空間 といひ、次元は  $\dim(V) = 0$  とする。

**定義**

(有限次のベクトル空間)

ベクトル空間  $V$  の次元  $\dim(V)$  が有限であるとき、 $V$  を 有限次のベクトル空間 とする。

**例**

(ベクトル空間の次元の具体例)

$\mathbb{R}^n \ni e_1, e_2, \dots, e_n$  標準基底

$$\dim(V) = n$$

**例**

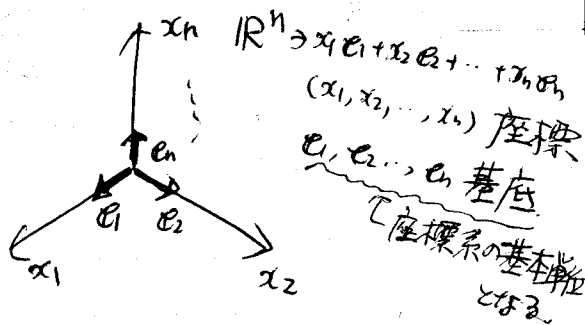
(ベクトル空間の次元の具体例)

$\mathbb{R}[x]_n \ni 1, x, x^2, \dots, x^n$

1)  $1, x, x^2, \dots, x^n$  は 1 次独立。

2)  $\mathbb{R}[x]_n \ni a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  あり

$1, x, \dots, x^n$  は  $\mathbb{R}[x]_n$  を生成する。



$\Rightarrow 1, x, \dots, x^n$  は  $\mathbb{R}[x]_n$  の基底。

$$\Rightarrow \dim(\mathbb{R}[x]_n) = n+1$$

**定理**

(ベクトル空間の次元と1次独立な最大個数)

ベクトル空間  $V$  が有限次元である。

$\Leftrightarrow V$  のベクトルの1次独立な最大個数が有限である。

このとき

$$\dim(V) = V \text{ のベクトルの1次独立な最大個数}$$

(証明)

$\dim(V) = n$  とする。  $\Rightarrow n$  個の基底  $\Rightarrow$  任意の  $n+1$  個以上のベクトルは、  
1次従属。

$n$  個の基底の1次結合で表される。

$\Rightarrow V$  の1次独立な最大個数は  $n$  である。

$V$  の1次独立な最大個数を  $n$  とする。  $u_1, \dots, u_n$  を1次独立とする。

$\Rightarrow u_1, \dots, u_n, u$  は1次従属。

$\Rightarrow u$  は  $u_1, \dots, u_n$  の1次結合で表せる。

$\Rightarrow u_1, \dots, u_n$  は  $V$  の基底。

$$\Rightarrow \dim(V) = n$$



**例** (解空間の次元の具体例)

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

方程式を  $Ax=0$  とおく.

Aを簡約化すると.  $A \rightarrow B = \left[ \begin{array}{ccccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 3 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & & & \end{array} \right]$  ①

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_4 - x_5 \\ x_3 = x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

$x_2 = c_1, x_4 = c_2, x_5 = c_3 \in \mathbb{R}$  とおく.

解は

$$\begin{aligned} x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2c_1 - 3c_2 - c_3 \\ c_1 \\ c_2 - 2c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 \in W \end{aligned}$$

解  $x$  は  $a_1, a_2, a_3$  の1次結合で表される.

$a_1, a_2, a_3$  が1次独立であるか調べる.

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0 \text{ ②}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2c_1 - 3c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 - 2c_3 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{1次関係は自明なものに限る.}$$

よって,  $a_1, a_2, a_3$  は1次独立である.

よって  $W$  は  $a_1, a_2, a_3$  により生成される.  $a_1, a_2, a_3$  は  $W$  の基底である.

よって  $W$  の次元は

$$\dim(W) = 3 \quad \leftarrow \text{任意定数の個数.}$$

となる.

**注意**

$a_1, a_2, a_3$  を方程式  $Ax=0$  の基本解という.

**定理** (解空間の次元)

$$W = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0, A: m \times n \text{ 行列} \}$$

$$\dim(W) = n - \text{rank}(A)$$

(証明)

方程式  $Ax = 0$  の解は、任意定数の個数は  $n - \text{rank}(A) =: n - r$  個である。  
よって解は

$$x = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_{n-r} a_{n-r}$$

$$\forall c_1, \forall c_2, \dots, \forall c_{n-r} \in \mathbb{R}$$

と表される。ここで  $a_1, a_2, \dots, a_{n-r}$  は 1 次独立である。なぜなら

$$a_1 = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ * \\ * \\ \vdots \\ 0 \\ * \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad a_{n-r} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ * \end{bmatrix}$$

とよるので  $a_1, a_2, \dots, a_{n-r}$  の 1 次関係は

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_{n-r} a_{n-r} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ \vdots \\ c_{n-r} = 0 \end{cases}$$

となり自明なものに限るからである。

以上より 解空間  $W$  は基底  $a_1, a_2, \dots, a_{n-r}$  により生成されるベクトル空間である。  
次元は

$$\dim(W) = \text{任意定数の個数} = n - \text{rank}(A)$$

と得られる。





**定義**

(ベクトルの集合で生成される部分空間)

$$V \ni u_1, u_2, \dots, u_n$$

$$\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle_{\mathbb{R}} = W = \{c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n \mid c_i \in \mathbb{R}\}$$

$\Rightarrow V \supset W$   $W$ は $V$ の部分空間

$\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle_{\mathbb{R}}$ を $u_1, \dots, u_n$ で生成される $V$ の部分空間という。

**定理**

(ベクトルの集合で生成される部分空間の次元)

$$\dim(\langle u_1, \dots, u_n \rangle_{\mathbb{R}}) = u_1, \dots, u_n \text{の1次独立な最大個数}$$

**例**

(ベクトルの集合で生成される部分空間の次元の具体例)

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a_1, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 \supset \langle a_1, a_2, a_3 \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$A = [a_1 \ a_2 \ a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B = [b_1 \ b_2 \ b_3]$$

$$\begin{cases} a_1, a_2 \text{は1次独立} \\ a_3 = -5a_1 + 2a_2 \end{cases} \iff \begin{cases} b_1 = e_1, \ b_2 = e_2 \\ b_3 = -5b_1 + 2b_2 \end{cases}$$

$a_1, a_2, a_3$ の1次独立な最大個数は2個

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle \ni \forall \alpha = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 \quad (\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

$$= c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 (-5a_1 + 2a_2)$$

$$= (c_1 - 5c_3) a_1 + (c_2 + 2c_3) a_2$$

$$= \tilde{c}_1 a_1 + \tilde{c}_2 a_2 \quad (\forall \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R})$$

1次独立, 基底.

$$\Rightarrow \dim(\langle a_1, a_2, a_3 \rangle) = 2 \quad //$$



### 定理

$$V \ni v_1, v_2, \dots, v_n$$

$$\dim(V) = n$$

- (1)  $v_1, v_2, \dots, v_n$  は  $V$  の基底である  
 $\Leftrightarrow$  (2)  $v_1, v_2, \dots, v_n$  は 1 次独立である.  
 $\Leftrightarrow$  (3)  $v_1, v_2, \dots, v_n$  は  $V$  を生成する.

### 例

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3$$

$$\mathbb{R}^3 \ni e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 \ni \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

- (1)  $e_1, e_2, e_3$  は基底の組の 1 つ.  
(2)  $e_1, e_2, e_3$  は 1 次独立.  
(3)  $e_1, e_2, e_3$  は  $\mathbb{R}^3$  を生成する.

### 例

$$\dim \mathbb{R}[x]_2 = 3$$

$$\mathbb{R}[x]_2 \ni f_1 = x + x^2, f_2 = 1 - x^2, f_3 = x$$

$$(f_1, f_2, f_3) = (1, x, x^2) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = (1, x, x^2) A$$

$$\mathbb{R}[x]_2 \ni \forall f = a + bx + cx^2 = (1, x, x^2) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = (1, x, x^2) \vec{a}$$

$$f = \tilde{a} f_1 + \tilde{b} f_2 + \tilde{c} f_3 = (f_1, f_2, f_3) \tilde{\vec{a}} \text{ とおくと}$$

$$(1, x, x^2) \vec{a} = (f_1, f_2, f_3) \tilde{\vec{a}} = (1, x, x^2) A \tilde{\vec{a}}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = A \tilde{\vec{a}} \Rightarrow \tilde{\vec{a}} = A^{-1} \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ a \\ -a+b-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \end{bmatrix}$$

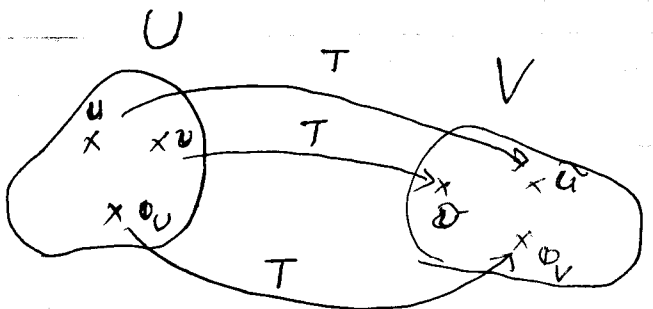
よって

$$\mathbb{R}[x]_2 \ni f = a + bx + cx^2 = (a+c)(x+x^2) + (a)(1-x^2) + (-a+b-c)(x) = \tilde{a} f_1 + \tilde{b} f_2 + \tilde{c} f_3$$

- (1)  $f_1, f_2, f_3$  は  $\mathbb{R}[x]_2$  の基底の組の 1 つ.  
(2)  $f_1, f_2, f_3$  は 1 次独立である.  
(3)  $f_1, f_2, f_3$  は  $\mathbb{R}[x]_2$  を生成する.

# 線形写像

## 線形写像



### 定義

(線形写像)

$U, V$  を  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間とする

$T$  を  $U$  から  $V$  への写像とする. ( $T: U \rightarrow V$ )

次の条件(1),(2)をみたるとき写像  $T$  を ( $\mathbb{R}$  上の) 線形写像 といい.

または 1次写像 (linear mapping) という.

(1)  $T(u+v) = T(u) + T(v) \in V$

( $u, v \in U, T(u), T(v) \in V$ )

(2)  $T(cu) = cT(u) \in V$

( $u \in U, c \in \mathbb{R}, T(u) \in V$ )

### 注意

(線形写像における零ベクトル)

$0_U \in U, 0_V \in V, 0 \in \mathbb{R}$

$T(0_U) = T(0 \cdot 0_U) = 0 \cdot T(0_U) = 0_V$

よって線形写像  $T$  は  $0_U$  を  $0_V$  へ写す.

### 例

(線形写像の具体例)

関数  $y = f(x) = ax$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto y = ax$

(1)  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$f(x_1+x_2) = a(x_1+x_2) = ax_1+ax_2 = f(x_1)+f(x_2) \in \mathbb{R}$

(2)  $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

$f(cx) = a(cx) = c(ax) = cf(x) \in \mathbb{R}$

(1),(2)より写像  $f$  は線形写像である.

### 例

(線形写像ではない具体例)

関数  $y = f(x) = ax + b$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto y = ax + b$

(1)  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$f(x_1+x_2) = a(x_1+x_2)+b = (ax_1+b)+(ax_2+b)-b = f(x_1)+f(x_2)-b \neq f(x_1)+f(x_2)$

(2)  $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

$f(cx) = a(cx)+b = c(ax+b)+b-b = cf(x)-b \neq cf(x)$

(1),(2)より写像  $f$  は線形写像ではない.

**例** (線形写像の具体例)

$u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m, A: m \times n$  行列

$$v = Au = T_A(u)$$

$$T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$u \mapsto v = Au$$

1)  $x, y \in \mathbb{R}^n, \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^m$

$$\tilde{x} = Ax = T_A(x), \tilde{y} = Ay = T_A(y)$$

$$T_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \tilde{x} + \tilde{y} = T_A(x) + T_A(y)$$

2)  $x \in \mathbb{R}^n, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}$

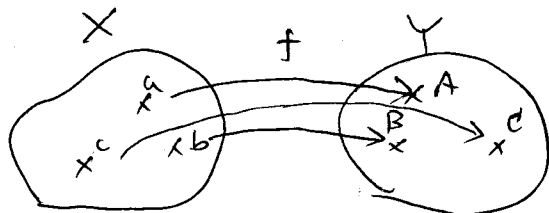
$$\tilde{x} = Ax = T_A(x)$$

$$T_A(cx) = A(cx) = cAx = c\tilde{x} = cT_A(x)$$

1), 2) より写像  $T_A$  は線形写像である。

**定義** (写像)

集合  $X, Y$



$X$  の各元を  $Y$  の各元に対応させる規則  $f$  を 写像 (mapping) という。

$$f: X \rightarrow Y \quad X \xrightarrow{f} Y$$

$$a \mapsto A = f(a)$$

$A = f(a)$   
 $B = f(b)$   
 $c = f(c)$

} 写像  $f$  を具体的な式で表したものを  
関数 (function) という。

特に集合  $X$  と  $Y$  が同じ集合のときは、  
写像を 変換 (transformation) という。

## 線形写像の像と核

**定義**

(線形写像の像と核)

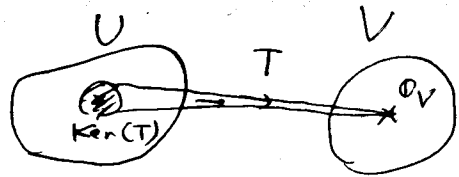
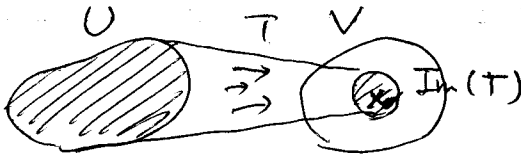
$$T: U \rightarrow V$$

$$\text{Im}(T) = \{v \mid v = T(u), u \in U, v \in V\}$$

$$\text{Ker}(T) = \{u \mid T(u) = 0_V, u \in U\}$$

集合  $\text{Im}(T)$  を  $T$  の 像 (image) という。

集合  $\text{Ker}(T)$  を  $T$  の 核 (kernel) という。



**定理**

$$T: U \rightarrow V$$

(1)  $\text{Im}(T)$  は  $V$  の部分空間である。

(2)  $\text{Ker}(T)$  は  $U$  の部分空間である。

(証明) (1) (i)  $0_U \in U, T(0_U) = 0_V \Rightarrow 0_V \in \text{Im}(T)$

(ii)  $u_1, u_2 \in U, v_1 = T(u_1), v_2 = T(u_2) \in \text{Im}(T)$

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = v_1 + v_2 \Rightarrow v_1 + v_2 \in \text{Im}(T)$$

(iii)  $u \in U, v = T(u) \in \text{Im}(T)$

$$c \in \mathbb{R}, T(cu) = cT(u) = cv \Rightarrow cv \in \text{Im}(T)$$

(i) ~ (iii) より  $\text{Im}(T)$  は  $V$  の部分空間となる。

(2) (i)  $0_U \in U, T(0_U) = 0_V \Rightarrow 0_U \in \text{Ker}(T)$

(ii)  $u_1, u_2 \in \text{Ker}(T)$  より  $T(u_1) = 0_V, T(u_2) = 0_V$

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0_V + 0_V = 0_V \Rightarrow u_1 + u_2 \in \text{Ker}(T)$$

(iii)  $u \in \text{Ker}(T)$  より  $T(u) = 0_V$

$$c \in \mathbb{R}, T(cu) = cT(u) = c \cdot 0_V = 0_V \Rightarrow cu \in \text{Ker}(T)$$

(i) ~ (iii) より  $\text{Ker}(T)$  は  $U$  の部分空間となる。



## § 線形写像の階数と退化次数

$\text{Ker}(T)$  と  $\text{Im}(T)$  の次数を考える.

$$\begin{aligned} \text{Ker}(T_A) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} = \text{方程式 } Ax=0 \text{ の解空間} \\ \dim(\text{Ker}(T_A)) &= \dim(Ax=0 \text{ の解空間}) = Ax=0 \text{ の解の任意定数の個数} \\ &= n - \text{rank}(A) =: \text{null}(T_A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(T_A) &= \{y = Ax \in \mathbb{R}^m \mid \forall x \in \mathbb{R}^n\} \\ A &= [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \text{ とおく.} \\ y = Ax &= [a_1 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n, \quad x_j \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

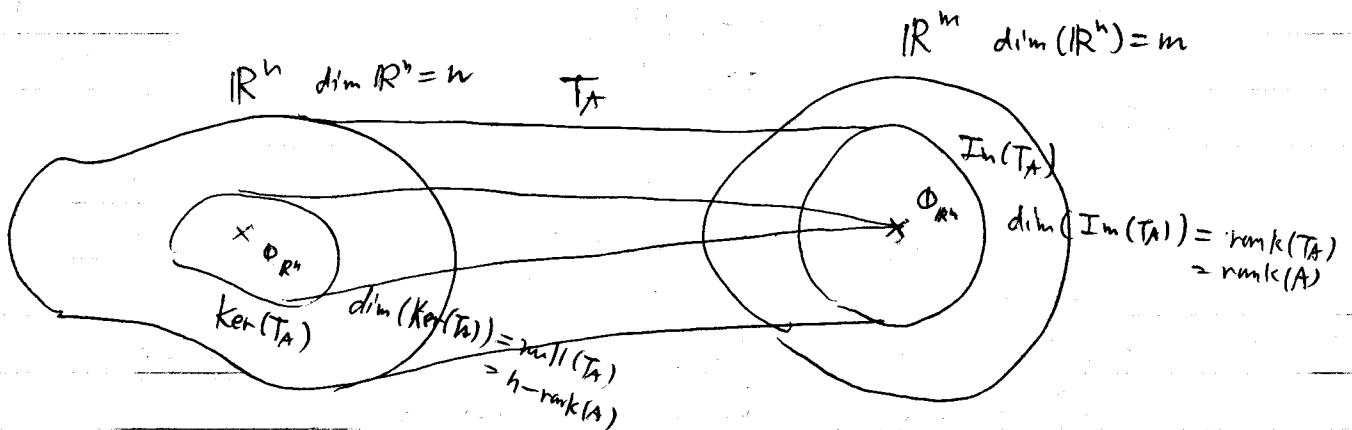
$$\text{Im}(T_A) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(T_A)) &= \dim \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle_{\mathbb{R}} = a_1, \dots, a_n \text{ の 1 次独立な } n \text{ つの } \mathbb{R} \text{ の最大個数} \\ &= \text{rank}(A) =: \text{rank}(T_A) \end{aligned}$$

$$T_A \text{ の退化次数 } \text{null}(T_A) \stackrel{\text{def}}{=} n - \text{rank}(A) = \dim(\text{Ker}(T_A))$$

$$T_A \text{ の階数 } \text{rank}(T_A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{rank}(A) = \dim(\text{Im}(T_A))$$

$$\Rightarrow \text{null}(T_A) + \text{rank}(T_A) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$$



一般的に

**定義** (線形写像の階数と退化次数)

$$T: U \rightarrow V$$

$T$  の階数を  $\text{rank}(T) = \dim(\text{Im}(T))$  とする。

$T$  の退化次数を  $\text{null}(T) = \dim(\text{Ker}(T))$  とする。

**定理** (階数と退化次数の関係)

$$\text{null}(T) + \text{rank}(T) = \dim(U)$$

$$T: U \rightarrow V$$

(証明)

$$r = \text{null}(T) = \dim(\text{Ker}(T))$$

$$s = \text{rank}(T) = \dim(\text{Im}(T))$$

$\text{Ker}(T) \supset \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  基底

$\text{Im}(T) \supset \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$  基底

$U \supset \{u_{r+1}, \dots, u_{r+s}\}$  に対し  $T(u_{r+m}) = v_1, \dots, T(u_{r+s}) = v_s$  とする。

$r+s$  個のベクトル  $u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_{r+s}$  が  $U$  の基底となることを示す。

このとき  $\dim(U) = r+s = \text{null}(T) + \text{rank}(T)$  が成り立ち、

また、 $u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_{r+s}$  が  $U$  を生成することを示す。

$U \ni \forall u$  に対して  $T(u) \in \text{Im}(T)$  より

$$T(u) = b_1 v_1 + \dots + b_s v_s \quad (b_j \in \mathbb{R})$$

と書ける。これより

$$\begin{aligned} T(u - b_1 u_{r+1} - \dots - b_s u_{r+s}) &= T(u) - (b_1 T(u_{r+1}) + \dots + b_s T(u_{r+s})) \\ &= (b_1 v_1 + \dots + b_s v_s) - (b_1 v_1 + \dots + b_s v_s) = \mathbf{0}_V \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u - b_1 u_{r+1} - \dots - b_s u_{r+s} \in \text{Ker}(T)$$

$$\Rightarrow u - b_1 u_{r+1} - \dots - b_s u_{r+s} = a_1 u_1 + \dots + a_r u_r \quad (a_j \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow u = a_1 u_1 + \dots + a_r u_r + b_1 u_{r+1} + \dots + b_s u_{r+s}$$

よって、 $u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_{r+s}$  は  $U$  を生成する。

次に、 $u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_{r+s}$  が 1 次独立であることを示す。

一次関係

$$a_1 u_1 + \dots + a_r u_r + b_1 u_{r+1} + \dots + b_s u_{r+s} = 0_U$$

に於いて  $T$  をほどこすと

$$a_1 T(u_1) + \dots + a_r T(u_r) + b_1 T(u_{r+1}) + \dots + b_s T(u_{r+s}) = 0_V$$

$$a_1 v_1 + \dots + a_r v_r + b_1 v_1 + \dots + b_s v_s = 0_V$$

$$b_1 v_1 + \dots + b_s v_s = 0_V$$

と仮定。  $v_1, \dots, v_s$  は 1 次独立なので、 $b_1 = 0, \dots, b_s = 0$  と仮定。 すると

$$a_1 u_1 + \dots + a_r u_r = 0$$

を得る。  $u_1, \dots, u_r$  は 1 次独立であるから  $a_1 = 0, \dots, a_r = 0$  と仮定。

よって  $u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_{r+s}$  は 1 次独立である。





**例** (線形写像の像の核の具体例)

$$T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \mathcal{X} & \mapsto \mathcal{Y} = A\mathcal{X} \end{matrix}$$

$$\mathcal{Y} = A\mathcal{X} = T(\mathcal{X})$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_5]$$

$\text{Ker}(T)$ ,  $\text{Im}(T)$  の基底と次元  $\text{null}(T)$ ,  $\text{rank}(T)$  を求めよ。

簡約化

$$A \rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_5]$$

$$\begin{cases} a_1, a_2: 1\text{-次元独立} \\ a_3 = a_1 + a_2 \\ a_4 = 2a_1 - a_2 \\ a_5 = a_1 + 2a_2 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1, b_2: 1\text{-次元独立} \\ b_3 = b_1 + b_2, b_4 = 2b_1 - b_2, b_5 = b_1 + 2b_2 \end{array} \right.$$

$$\text{rank}(A) = 2$$

$$\begin{aligned} A\mathcal{X} = 0 \text{ の解は } \mathcal{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_3 - 2x_4 - x_5 \\ -x_3 + x_4 - 2x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 \quad (c_j \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\text{Ker}(T) = \{ \mathcal{X} \in \mathbb{R}^5 \mid A\mathcal{X} = 0 \} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\dim(\text{Ker}(T)) = \dim \langle u_1, u_2, u_3 \rangle_{\mathbb{R}} = 5 - \text{rank}(A) = 5 - 2 = 3 = \text{null}(T)$$

$$\forall \mathcal{X} \in \mathbb{R}^5, \mathcal{X} \neq 0$$

$$\mathbb{R}^3 \ni \mathcal{Y} = A\mathcal{X} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_5 a_5 \quad (x_j \in \mathbb{R})$$

$$= x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 (a_1 + a_2) + x_4 (2a_1 - a_2) + x_5 (a_1 + 2a_2)$$

$$= (x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5) a_1 + (x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5) a_2$$

$$= c_1 a_1 + c_2 a_2 \quad (\forall c_j \in \mathbb{R})$$

$$\text{Im}(T) = \{ \mathcal{Y} = A\mathcal{X} \mid \forall \mathcal{X} \in \mathbb{R}^5 \} = \langle a_1, a_2 \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\dim(\text{Im}(T)) = \dim \langle a_1, a_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \text{rank}(A) = 2 = \text{rank}(T)$$

以上より  $\text{Ker}(T)$  の基底の組の一つは  $u_1, u_2, u_3$  であり次元は  $\text{null}(T) = 3$  と分かる。  
 $\text{Im}(T)$  の基底の組の一つは  $a_1, a_2$  であり次元は  $\text{rank}(A) = 2$  と分かる。



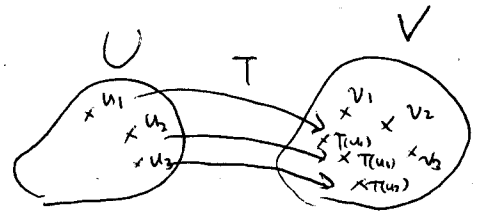
## § 線形写像の表現行列

**定義** (線形写像の表現行列)

$$T: U \rightarrow V$$

$U$  の基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

$V$  の基底  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$



$$(T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)) = (v_1, v_2, \dots, v_m)A \quad (A: m \times n \text{ 行列})$$

$A$  を  $U$  の基底  $\{u_1, \dots, u_n\}$  と  $V$  の基底  $\{v_1, \dots, v_m\}$  に関する 表現行列 とする。

**例** (表現行列の具体例)

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{matrix} \psi \\ x \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} \psi \\ y \end{matrix} = Ax$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$y = T(x) = Ax$$

$$\mathbb{R}^2 \ni e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dots \text{標準基底}$$

$$\mathbb{R}^3 \ni e'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dots \text{標準基底}$$

$$T(e_1) = Ae_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2e'_1 + e'_2 + 4e'_3$$

$$T(e_2) = Ae_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = e'_1 + 3e'_3$$

$$\begin{aligned} (T(e_1), T(e_2)) &= (2e'_1 + e'_2 + 4e'_3, e'_1 + 3e'_3) = (e'_1, e'_2, e'_3) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= (e'_1, e'_2, e'_3) \underbrace{A}_{\text{表現行列}} \end{aligned}$$

**注意**

$T = T_A$  において標準基底をとれば、表現行列は  $A$  と一致する。

## § 表現行列と基底の変換行列

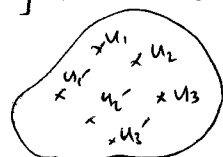
**定義**

(基底の変換行列)

$U$  の 2 つの基底の組  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{u'_1, \dots, u'_n\}$

$$(u'_1, \dots, u'_n) = (u_1, \dots, u_n) P$$

行列  $P$  を 基底の変換行列 という。



**注意**

$u_1, \dots, u_n$  と  $u'_1, \dots, u'_n$  は 1 次独立であるから  $P$  は正則行列となる。

**定理**

(基底を取りかえたときの変換行列)

$$T: U \rightarrow V$$

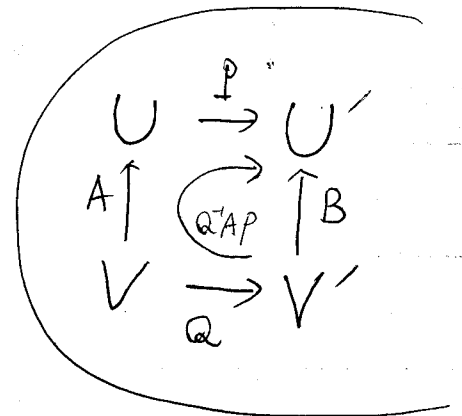
$U$  の基底  $\{u_1, \dots, u_n\}, \{u'_1, \dots, u'_n\}$   $(u'_1, \dots, u'_n) = (u_1, \dots, u_n) P$

$V$  の基底  $\{v_1, \dots, v_m\}, \{v'_1, \dots, v'_m\}$   $(v'_1, \dots, v'_m) = (v_1, \dots, v_m) Q$

$$(T(u_1), \dots, T(u_n)) = (v_1, \dots, v_m) A$$

$$(T(u'_1), \dots, T(u'_n)) = (v'_1, \dots, v'_m) B$$

$$\Rightarrow B = Q^{-1} A P$$



(証明)

$$(T(u'_1), \dots, T(u'_n)) = (T(\sum_k p_{k1} u_k), \dots, T(\sum_k p_{kn} u_k))$$

$$= (\sum_k p_{k1} T(u_k), \dots, \sum_k p_{kn} T(u_k))$$

$$= (T(u_1), \dots, T(u_n)) P$$

$$= (v_1, \dots, v_m) A P$$

$$(T(u'_1), \dots, T(u'_n)) = (v'_1, \dots, v'_m) B = (v_1, \dots, v_m) Q B$$

$$\text{よって } (v_1, \dots, v_m) A P = (v_1, \dots, v_m) Q B$$

$$\Rightarrow A P = Q B$$

$$\Rightarrow B = Q^{-1} A P$$



例 (基底を取り換えたときの変換行列の具体例)

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad y = T(x) = Ax$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x & \mapsto & y = Ax \end{array} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 \text{の基底 } a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^2 \text{の基底 } b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$T$  の  $\{a_1, a_2, a_3\}$  と  $\{b_1, b_2\}$  に関する表現行列  $B$  を求めよ。

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \text{の標準基底 } \{e_1, e_2, e_3\} \\ \mathbb{R}^2 \text{ " } \{e'_1, e'_2\} \end{array} \Rightarrow (T(e_1), T(e_2), T(e_3)) = (e'_1, e'_2) A$$

基底の変換  $\{e_1, e_2, e_3\} \rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 2e_1 + 3e_3, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e_2 + e_3, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_1 + e_3$$

$$\Rightarrow (a_1, a_2, a_3) = (2e_1 + 3e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_3)$$

$$= (e_1, e_2, e_3) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (e_1, e_2, e_3) P$$

$$P = [a_1 \ a_2 \ a_3]$$

基底の変換  $\{e'_1, e'_2\} \rightarrow \{b_1, b_2\}$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e'_1 + e'_2, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2e'_1 + 3e'_2$$

$$\Rightarrow (b_1, b_2) = (e'_1 + e'_2, 2e'_1 + 3e'_2) = (e'_1, e'_2) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= (e'_1, e'_2) Q \quad Q = [b_1 \ b_2]$$

$$(T(a_1), T(a_2), T(a_3)) = (b_1, b_2) B = (e'_1, e'_2) Q B$$

$$(T(a_1), T(a_2), T(a_3)) = (T(e_1), T(e_2), T(e_3)) P = (e'_1, e'_2) A P$$

$$\Rightarrow Q B = A P \Rightarrow B = Q^{-1} A P$$

$$\text{よって } B = Q^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 17 & 17 & 7 \\ -5 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

## § 線形変換

**定義** (線形変換)

$$T: U \rightarrow U$$

$T$  を 線形変換 という。

**定理**

(線形変換の表現行列の基底の取り換え)

$U$  の基底  $\{u_1, \dots, u_n\}, \{u'_1, \dots, u'_n\}$

$$(u'_1, \dots, u'_n) = (u_1, \dots, u_n)P$$

$$T: U \rightarrow U$$

$$(T(u_1), \dots, T(u_n)) = (u_1, \dots, u_n)A$$

$$(T(u'_1), \dots, T(u'_n)) = (u'_1, \dots, u'_n)B$$

$$\Rightarrow B = P^{-1}AP$$

(証明) 前定理より明らか。



**例**

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{matrix} \psi \\ x \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} \psi \\ y \end{matrix} = Ax$$

$$y = T(x) = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^2 \text{ の基底 } u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(T(u_1), T(u_2)) = (u_1, u_2)B$  をみたす  $B$  を求める

$$(T(e_1), T(e_2)) = (e_1, e_2)A$$

$$(u_1, u_2) = (e_1, e_2)P, \quad P = [u_1 \ u_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} //$$

例)

$$T: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2 \quad g(x) = T(f(x)) = f'(x)x + f(1)x^2 + f(2)$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$

$$f(x) \mapsto g(x) \quad \text{基底 } \{1+x, x+x^2, x^2\} \text{ に関する表現行列は?}$$

基底  $\{1, x, x^2\}$  に関する表現行列  $A$  を求めよ。

$$(T(1), T(x), T(x^2)) = (1, x, x^2)A \quad \equiv \quad (1, x, x^2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} T(1) = (1)'x + (1)(1)x^2 + (1)(2) = 1+x^2 \\ T(x) = (x)'x + (x)(1)x^2 + (2)(2) = 1+x \\ T(x^2) = (x^2)'x + (x^2)(1)x^2 + (x^2)(2) = 1+2x^2 \end{cases}$$

基底  $\{1, x, x^2\} \rightarrow \{1+x, x+x^2, x^2\}$

$$(1+x, x+x^2, x^2) = (1, x, x^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (1, x, x^2)P$$

基底  $\{1+x, x+x^2, x^2\}$  に関する表現行列  $B$  を求めよ。

$$(T(1+x), T(x+x^2), T(x^2)) = (1+x, x+x^2, x^2)B$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} //$$

## § 固有値と固有ベクトル

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x & \mapsto & y \end{array}$$

$$y = T(x) = Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x = e_1 \text{ のとき } y = T(e_1) = A e_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 e_1$$

$$x = e_2 \text{ のとき } y = T(e_2) = A e_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_2$$

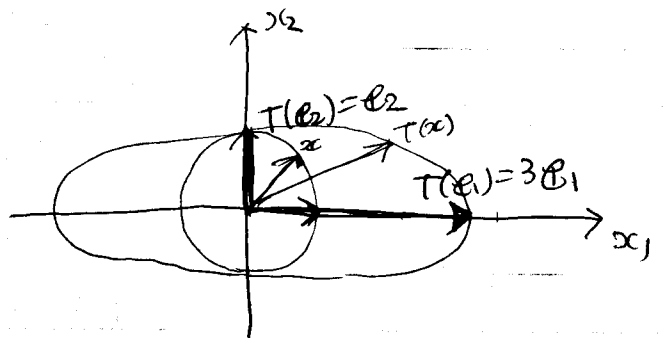
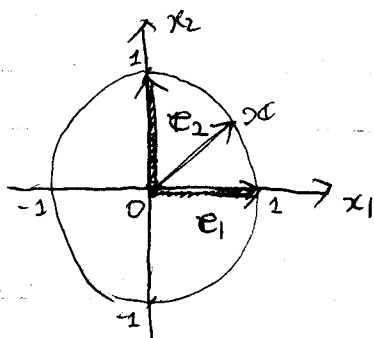
$e_1 \xrightarrow{T} 3e_1$   
 $e_2 \xrightarrow{T} e_2$

} 線形変換  $T$  により  $e_1, e_2$  は  
 自分自身のスカラー倍に写される。

$\mathbb{R}^2 \ni \forall x = x_1 e_1 + x_2 e_2$  のとき

$$y = T(x) = A(x_1 e_1 + x_2 e_2) = x_1 A e_1 + x_2 A e_2$$

$$= x_1 (3e_1) + x_2 (e_2) = (3x_1) e_1 + x_2 e_2$$



## 定義 (固有値, 固有ベクトル)

$V$ : ベクトル空間

$T: V \rightarrow V$

$$T(u) = \lambda u \quad (0 \neq u \in V, \lambda \in \mathbb{R})$$

をみたす  $\lambda$  を  $T$  の 固有値 (eigen value) という。

$u \in$  固有値  $\lambda$  に属する  $T$  の 固有ベクトル (eigen vector) という。

## 注意

$T(0) = \lambda 0 = 0$  より  $0$  は 線形変換  $T$  によって、必ず自分自身のスカラー倍に写される。 $0$  は固有ベクトルと定義しない。

## 例

(固有値, 固有ベクトルの具体例)

$$y = T(x) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} T(e_1) &= 3e_1 \\ T(e_2) &= e_2 \end{aligned} \right\} \text{より}$$

$T$  の固有値は  $\lambda = 3$  と  $\lambda = 1$  である。

固有値  $\lambda = 3$  に属する固有ベクトルは  $e_1$  である。

固有値  $\lambda = 1$  に //  $e_2$  である。

## 例

(固有値, 固有ベクトルの具体例)

$$\begin{array}{ccc} T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 & & y = T(x) = Ax = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{c} u \\ x \end{array} \mapsto \begin{array}{c} u \\ y \end{array} & & \end{array}$$

$$x = u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ とおくと.}$$

$$y = T(u) = Au = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 4u. \quad \Rightarrow T(u) = 4u = \lambda u$$

$\Rightarrow \lambda = 4$  は固有値

$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  は固有値  $\lambda = 4$  に属する  $T$  の固有ベクトル



## § 固有空間

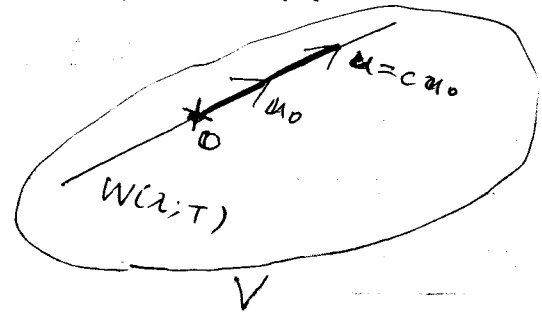
$u_0$  を固有値  $\lambda$  に属する固有ベクトルとする  $\Rightarrow T(u_0) = \lambda u_0$

このとき  $u = cu_0$  もまた  $\lambda$  に属する固有ベクトルとなる. ただし  $c \neq 0$  とする.

$$\textcircled{1} T(u) = T(cu_0) = cT(u_0) = c(\lambda u_0) = \lambda(cu_0) = \lambda u \Rightarrow T(u) = \lambda u$$

**定義** (固有空間)  
 $T: V \rightarrow V$   
 $\lambda: T$  の固有値

$$W(\lambda; T) = \{u \in V \mid T(u) = \lambda u\}$$



$W(\lambda; T)$  を  $T$  の固有値  $\lambda$  の固有空間 (eigen space) とする.

(注)  $0$  を除外していないことに注意.

**定理**

$W(\lambda; T)$  は  $V$  の部分空間である.

(証明)

(i)  $V \ni 0, T(0) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow 0 \in W(\lambda; T)$

(ii)  $u, v \in W(\lambda; T)$  のとき  $T(u) = \lambda u, T(v) = \lambda v.$

$$T(u+v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v) \Rightarrow u+v \in W(\lambda; T)$$

(iii)  $u \in W(\lambda; T)$  のとき  $T(u) = \lambda u.$

$$c \in \mathbb{R}, T(cu) = cT(u) = c(\lambda u) = \lambda(cu) \Rightarrow cu \in W(\lambda; T)$$

**注意**

$0$  以外の  $u \in W(\lambda; T)$  は  $T$  の固有ベクトルである.

## § 行列の固有値

$$\begin{array}{ccc} T_A: \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \mapsto & y \end{array} \quad y = T_A(x) = Ax$$

固有値:  $\lambda$

固有ベクトル:  $u$

$$T(u) = \lambda u$$

$T_A$  の固有値  $\lambda$  を求める.

$$T_A(x) = Ax = \lambda x \text{ より } Ax = \lambda x = \lambda E x$$

$$\Rightarrow (\lambda E - A)x = 0$$

同次方程式の解で自明な解  $x = 0$  以外の解が固有ベクトル  $u$  となる.

非自明な解  $\Leftrightarrow$  任意定数を含む解

$$\Leftrightarrow \text{rank}(\lambda E - A) < n$$

$$\Leftrightarrow \det(\lambda E - A) = 0$$

よって  $(\lambda E - A)x = 0 \Leftrightarrow \det(\lambda E - A) = 0$ .

方程式  $g_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = 0$  の根が固有値  $\lambda$  となる.

**定義** (固有方程式)  
 $A$ : 正方行列.

$$g_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$$

行列  $A$  の 固有方程式 という.

**定義** (行列の固有値)  
 $A$  の固有方程式  $g_A(\lambda)$  の根を.  
(複素数も含めて)  
行列  $A$  の固有値 という.

**定理**

$$\lambda \text{ が } T_A \text{ の固有値} \Leftrightarrow g_A(\lambda) = 0.$$

例

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_A(x) &= \det(xE - A) = \det\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{vmatrix} x-7 & 6 \\ -3 & x+2 \end{vmatrix} = (x-7)(x+2) - (6 \times (-3)) = x^2 - 5x - 14 + 18 \\ &= x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) \end{aligned}$$

$$g_A(\lambda) = 0 \text{ より } \lambda = 1, 4.$$

よって  $A$  の固有値は  $\lambda = 1, \lambda = 4$  である。

②

例

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g_A(x) = \det(xE - A) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$A$  の固有値は  $\lambda = i, \lambda = -i$  である。

$T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  のとき,  $T_A$  の固有値は存在しない。

$T_A: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  のとき,  $T_A$  の固有値は  $\lambda = \sqrt{-1}, \lambda = -\sqrt{-1}$  である。

例

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T_A(u) = \lambda u, \lambda = ?, u = ?$$

$$W(\lambda; T_A) = ?$$

$$g_A(x) = \det(xE - A) = \begin{vmatrix} x-8 & 10 \\ -5 & x+7 \end{vmatrix} = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

$g_A(\lambda) = 0$  より固有値は  $\lambda = -2, 3$  である。

$\lambda = -2$  のとき  $(\lambda E - A)x = 0$  より  $(-2E - A)x = 0$  に対する  $x$  を求める.

$$-2E - A = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 10 \\ -5 & -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - x_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 \text{ より}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\forall c \in \mathbb{R})$$

よって  $\lambda = -2$  に対する固有ベクトルは  $u = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  ( $0 \neq \forall c \in \mathbb{R}$ ) である.

固有空間は  $W(-2; T_A) = \{u = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \forall c \in \mathbb{R}\}$  である.

$\lambda = 3$  のとき

$(\lambda E - A)x = 0$  より  $(3E - A)x = 0$  に対する解を求める.

$$3E - A = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{簡約化})$$

$$x_1 - 2x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 2x_2 \text{ より}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\forall c \in \mathbb{R})$$

よって  $\lambda = 3$  に対する固有ベクトルは  $u = c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  ( $0 \neq \forall c \in \mathbb{R}$ ) である.

固有空間は  $W(3; T_A) = \{u = c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \forall c \in \mathbb{R}\}$  である. (3)

(注意)  $\dim W(-2; T_A) = 1, \dim W(3; T_A) = 1, \dim \mathbb{R}^2 = 2$

$$\dim W(-2; T_A) + \dim W(3; T_A) = \dim \mathbb{R}^2$$

**定義**

(行列の多項式)

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad : \text{多項式}$$

$A$  : 正方行列

$$\Rightarrow f(A) \stackrel{\text{def}}{=} a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \dots + a_1 A + a_0 E$$

**定理**

(ケ-ル-ハミルトンの定理)

$g_A(x) : A$  の固有多項式

$$\Rightarrow g_A(A) = 0$$

**例**

(ケ-ル-ハミルトンの定理の使用例)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$g_A(x) = \det(xE - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ 3 & x+4 \end{vmatrix} = x^2 + 3x + 2$$

$$g_A(A) = A^2 + 3A + 2E = 0 \text{ より}$$

$$A^2 = -3A - 2E$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(-3A - 2E) = -3A^2 - 2A = -3(-3A - 2E) - 2A = 7A + 6E$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \dots = -15A - 14E$$

多項式  $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 1$  のとき  $f(A)$  を求める。

$$f(A) = A^4 + 2A^3 + A^2 + E$$

$$= (-15A - 14E) + 2(7A + 6E) + (-3A - 2E) + E$$

$$= -4A - 3E$$

$$= -4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} //$$

## § 一般の線形変換の固有値と固有空間の計算

**定義**

(固有方程式)

$T: V \rightarrow V$  線形変換

$V \ni u_1, u_2, \dots, u_n$  基底

$(T(u_1), \dots, T(u_n)) = A(u_1, \dots, u_n)$

$\Rightarrow A$  の固有方程式  $g_A(\lambda)$  を  $T$  の固有方程式 と いう  $g_T(\lambda)$  と書く。

**定理**

(固有方程式は基底の取り方に依らない)

$T$  の固有方程式  $g_T(\lambda)$  は基底の取り方に依らない。

(証明)

基底をとりかえて表現行列が  $A$  から  $B$  とかわりとする。

このとき  $B = P^{-1}AP$  が成り立つ。

$$\begin{aligned} g_B(\lambda) &= \det(\lambda E - B) = \det(\lambda E - P^{-1}AP) = \det(\lambda P^{-1}EP - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}(\lambda E - A)P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(\lambda E - A) \det(P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(P) \det(\lambda E - A) \\ &= \frac{1}{\det(P)} \cancel{\det(I)} \det(\lambda E - A) \\ &= \det(\lambda E - A) \\ &= g_A(\lambda) \quad // \end{aligned}$$



**定理**

(線形変換の固有値)

 $\lambda$  は  $T$  の固有値  $\Leftrightarrow g_T(\lambda) = 0$ 

(証明)

(⇒)  $u_1, \dots, u_n$  : 基底,  $\lambda$  : 固有値,  $u$  : 固有ベクトル

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = (u_1, \dots, u_n) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = (u_1, \dots, u_n) c \quad \text{と表す}$$

$$\begin{aligned} T(u) &= T(c_1 u_1 + \dots + c_n u_n) = c_1 T(u_1) + \dots + c_n T(u_n) \\ &= (T(u_1), \dots, T(u_n)) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = (T(u_1), \dots, T(u_n)) c \\ &= (u_1, \dots, u_n) A c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(u) &= \lambda u \\ &= \lambda (c_1 u_1 + \dots + c_n u_n) = \lambda (u_1, \dots, u_n) c = (u_1, \dots, u_n) (\lambda c) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (u_1, \dots, u_n) A c = (u_1, \dots, u_n) (\lambda c) \Rightarrow A c = \lambda c \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow c \neq 0 \text{ は } \lambda \text{ に関する } A \text{ の固有値} \Rightarrow g_T(\lambda) = g_A(\lambda) = 0$$

$$(\Leftarrow) \quad g_T(\lambda) = 0 \Rightarrow g_A(\lambda) = 0 \Rightarrow A c = \lambda c \quad (c \neq 0)$$

$$c \in \mathbb{R} \text{ として } u = (u_1, \dots, u_n) c = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \text{ と表す}$$

$$\begin{aligned} T(u) &= T(c_1 u_1 + \dots + c_n u_n) = (T(u_1), \dots, T(u_n)) c = (u_1, \dots, u_n) A c = (u_1, \dots, u_n) \lambda c \\ &= \lambda (u_1, \dots, u_n) c = \lambda u \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(u) = \lambda u \Rightarrow u \text{ は } \lambda \text{ に関する固有ベクトル} \quad \checkmark$$



例 (固有値の計算例)

$$T: \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2 \quad \rightarrow g(x) = T(f(x)) = f(1+2x)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ f(x) \mapsto g(x) \end{array}$$

$T$ の固有値, 固有空間を求めよ.

基底として  $\{1, x, x^2\}$  を選ぶ. (何れも  $\neq 0$ .)

$$T(1) = 1, T(x) = 1+2x, T(x^2) = (1+2x)^2 = 1+4x+4x^2$$

より.

$$(T(1), T(x), T(x^2)) = (1, x, x^2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = (1, x, x^2) A$$

と表せる. 固有方程式は

$$g_T(\lambda) = g_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$$

となる.  $g_T(\lambda) = 0$  より  $T$ の固有値は

$$\lambda = 1, 2, 4$$

である.  $T(f(x)) = \lambda f(x)$  をみたす固有ベクトル  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  を求める.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = (1, x, x^2) \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (1, x, x^2) a$$

$$\begin{aligned} T(f(x)) &= T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0T(1) + a_1T(x) + a_2T(x^2) \\ &= (T(1), T(x), T(x^2)) a = (1, x, x^2) A a \end{aligned}$$

より.  $A a = \lambda a$  が成立する.  $a$  を求める.

より. それぞれの固有値に対して方程式  $(\lambda E - A)x = 0$  を解く.

$\lambda = 4$  のとき

$$4E - A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{より } x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ \forall x_3 \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$A \text{ の } \lambda = 4 \text{ に属する固有ベクトル } a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 2c \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (0 \neq c \in \mathbb{R})$$

より. 固有空間  $T(4; T) = \{ c(1+2x+x^2) \mid c \in \mathbb{R} \}$  を得る.



$\lambda = 2$  のとき

$$2E - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } \left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = \forall c \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

A の  $\lambda = 2$  に属する固有ベクトルは  $\alpha = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  ( $0 \neq c \in \mathbb{R}$ )

よって固有空間  $W(2; T) = \{ c(1+2) \mid \forall c \in \mathbb{R} \}$  を得る。

$\lambda = 1$  のとき

$$E - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より } \left. \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = \forall c \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

A の  $\lambda = 1$  に属する固有ベクトルは  $\alpha = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  ( $0 \neq c \in \mathbb{R}$ )

よって固有空間  $W(1; T) = \{ e \mid \forall c \in \mathbb{R} \}$  を得る。

例  $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $f_A(x) = \det(xE - A) = \begin{vmatrix} x-5 & -6 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ -1 & -2 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)^2(x-3)$

$f_A(\lambda) = 0$  より固有値は  $\lambda = 2$  (重根),  $\lambda = 3$  である。

$\lambda = 3$  のとき  $\lambda E - A = 3E - A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$W(3; T_A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \forall c \in \mathbb{R} \right\}$$

$\lambda = 2$  のとき

$$\lambda E - A = 2E - A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W(2; T) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(注)  $\dim W(3; T_A) = 1$ ,  $\dim W(2; T) = 2$ ,  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$   
 $\dim W(3; T_A) + \dim W(2; T) = \dim \mathbb{R}^3$

## § 行列の対角化

**定義**

(同値・相似)

$A, B$ : 正方行列.

$A$  と  $B$  とが 同値 (equivalent) または 相似 (similar) である.

$\Leftrightarrow B = P^{-1}AP$  をみたす正則行列  $P$  が存在する.

変換  $A \mapsto B$  を 同値変換 (equivalence transformation) または 相似変換 (similarity transformation) とする.

**注意**

$A$  と  $B$  との固有値は同じ.  $\odot$   $A$  と  $B$  は基底の変換

**定義**

$A$ : 正方行列

$D$ : 対角行列.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & & 0 \\ & d_{22} & \\ 0 & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

行列  $A$  を相似変換して対角行列  $D$  で表すことを

$A$  の対角化 という. すなわち

$$D = P^{-1}AP$$

をみたす  $D, P$  を求めることをいう.

$D, P$  の成分が実数のとき,  $A$  は実数体上で対角化されるという.

$D, P$  の成分が複数のとき,  $A$  は複素数体上で //

**注意**

正方行列  $A$  は常に対角化できるとは限らない.

**注意**

$A$  と  $D$  の固有値は同じである.

$$D \text{ の固有値は } \varphi_D(x) = \det(xE - D) = \begin{vmatrix} x-d_{11} & & 0 \\ & x-d_{22} & \\ 0 & & x-d_{nn} \end{vmatrix} = (x-d_{11})(x-d_{22}) \cdots (x-d_{nn})$$

すなわち  $\lambda_1 = d_{11}, \lambda_2 = d_{22}, \lambda_3 = d_{33}, \dots, \lambda_n = d_{nn}$  が  $D$  の固有値である.

よって  $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$  とする.

A の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  とする。(重複する固有値は別のもつと考える.)

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  に属する固有ベクトル  $\underbrace{\varepsilon}_{\text{各々}} p_1, p_2, \dots, p_n$  とする.

このとき

$$A p_1 = \lambda_1 p_1, A p_2 = \lambda_2 p_2, \dots, A p_n = \lambda_n p_n$$

である.

$$[A p_1 \ A p_2 \ \dots \ A p_n] = A [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n] = A P$$

すなわち  $P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n]$  とおくと.

$$[A p_1 \ A p_2 \ \dots \ A p_n] = [\lambda_1 p_1 \ \lambda_2 p_2 \ \dots \ \lambda_n p_n] = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$
$$= P D$$

$$\text{すなわち } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \text{ とおくと.}$$

より  $P D = A P$  が成立する.

$p_1, p_2, \dots, p_n$  が 1 次独立であるとは定ると  $P$  は正則行列である.

$P^{-1}$  を左からかけて

$$\underline{P^{-1} P} D = P^{-1} A P \rightarrow E D = P^{-1} A P \rightarrow D = P^{-1} A P$$

$$\Rightarrow D = P^{-1} A P$$

を得る.

**定理**

(対角化)

A : n 次正方行列.

A の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ; 各々  $\lambda_i$  の固有ベクトル  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

$p_1, p_2, \dots, p_n$  が 1 次独立  $\Rightarrow D = P^{-1} A P$

$$\text{すなわち } D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n]$$

例 (対角化の計算例)

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$g_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 8 & 10 \\ -5 & \lambda + 7 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 3)$$

$g_A(\lambda) = 0$  より固有値は  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3$  である。

$\lambda = \lambda_1 = -2$  のとき

$$-2E - A = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 解は } x = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\forall c \in \mathbb{R})$$

$$\text{固有空間 } W(-2; T_A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \forall c \in \mathbb{R} \right\}, \dim W(-2; T_A) = 1$$

$\lambda_1 = -2$  に属する固有ベクトルとして  $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W(-2; T_A)$  とする。  
 $W(-2; T_A)$  の基底をとり

$\lambda = \lambda_2 = 3$  のとき

$$3E - A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 解は } x = c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} (\forall c \in \mathbb{R})$$

$$\text{固有空間 } W(3; T_A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \forall c \in \mathbb{R} \right\}, \dim W(3; T_A) = 1$$

$\lambda_2 = 3$  に属する固有ベクトルとして  $p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in W(3; T_A)$  とする。

よって

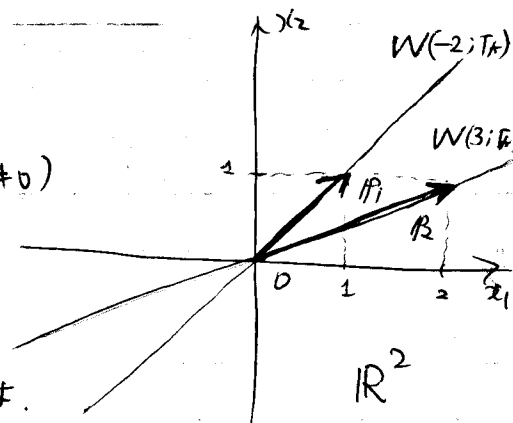
$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = [p_1 \ p_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

よって、 $P$  は正則行列であるから ( $\because \det P = -1 \neq 0$ )

$$D = P^{-1} A P$$

を得る。



問

$D = P^{-1} A P$  が成り立つことも値を代入して確認せよ。

例

(対角化の応用例)

A が対角化可能であるとする。

$D = P^{-1}AP$  が成り立つ。このとき

$$D = P^{-1}AP \rightarrow PDP^{-1} = \underline{PP^{-1}}A\underline{PP^{-1}} \rightarrow PDP^{-1} = EAE \rightarrow PDP^{-1} = A$$

$$\Rightarrow A = PDP^{-1}$$

を得る。つまり  $A^k$  を求める。

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1}) \\ &= P\underline{DP^{-1}P}D\underline{P^{-1}P}D \cdots \underline{P}DP^{-1} \\ &= P\underline{DEDE} \cdots \underline{EDP^{-1}} \\ &= P\underbrace{D^k}_k P^{-1} = PD^kP^{-1}. \end{aligned}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

よって

$$A^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

を得る。

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \text{ のとき, } D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(-2)^k + 2 \cdot 3^k & 2(-2)^k - 2 \cdot 3^k \\ -(-2)^k + 3^k & 2(-2)^k - 3^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$A^k$  は、

$\Rightarrow$  微分方程式, 差分方程式の解法に用いる。

例

(対角化の具体例)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$g_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -6 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -1 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-5 & -6 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

$g_A(\lambda) = 0$  より固有値は  $\lambda = 2$  (2重),  $\lambda = 3$  である.

$\lambda = 2$  のとき

$$2E - A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より}$$

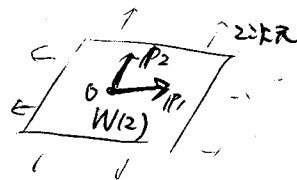
$$\text{解は } x = \begin{bmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\forall c_1, \forall c_2 \in \mathbb{R}).$$

$$\text{固有空間は } W(2; T_A) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \forall c_1, \forall c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\dim W(2; T_A) = 2$  である.  $W(2; T_A)$  より 1次独立な  $\lambda = 2$  に属する固有ベクトルを2つ取り出す.  $W(2; T_A)$  の基底として

$$p_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in W(2; T_A)$$

とある.



$\lambda = 3$  のとき

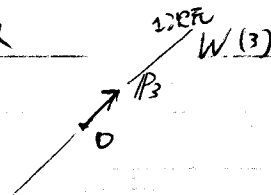
$$3E - A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より解は } x = c \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\forall c \in \mathbb{R}).$$

$$\text{固有空間は } W(3; T_A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \forall c \in \mathbb{R} \right\}, \dim W(3; T_A) = 1.$$

$\lambda = 3$  に属する固有ベクトルとして,  $W(3; T_A)$  の基底として

$$p_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W(3; T_A)$$

とある.



$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$  とおくと、 $\lambda_i$  は固有値に属する固有ベクトルは、それぞれ

$$P_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である。 $P_1, P_2, P_3$  は互に独立である。

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = [P_1 \ P_2 \ P_3] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とみると、 $P$  は正則なので

$$D = P^{-1} A P$$

と対角化される。

注

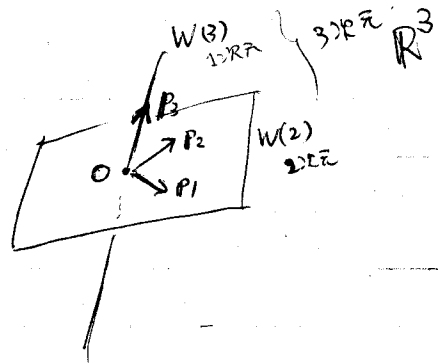
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  のとり方の順には自由度がある。固有ベクトルのとり方は <sup>スカラー倍等の</sup> 自由度がある。  
よって  $D, P$  は一通りに定まる訳ではない。

注

$$\dim W(2; TA) + \dim W(3; TA) = \dim \mathbb{R}^3$$

$$2 + 1 = 3$$

が成立する。



例) (対角化できない具体例)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

$f_A(\lambda) = 0$  より固有値は  $\lambda=2, \lambda=-1$  (2重)

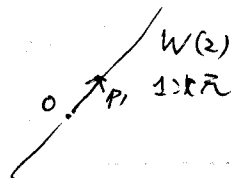
$\lambda=2$  のとき

$$2E - A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より 解は } x = c \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\forall c \in \mathbb{R}).$$

固有空間は  $W(2; T_A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}, \dim W(2; T_A) = 1.$

$\lambda=2$  に属する固有ベクトルを  $\rightarrow$  取り出すと

$$p_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in W(2; T_A)$$



である。

$\lambda=-1$  のとき

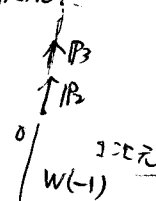
$$-E - A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より 解は } x = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\forall c \in \mathbb{R}).$$

固有空間は  $W(-1; T_A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}, \dim W(-1; T_A) = 1.$

固有値  $\lambda=-1$  は実際には2個あるので、固有ベクトルを2つ用意する必要がある。しかし、 $W(-1; T_A)$  から1次元独立なベクトルを2つ取り出すことはできない。

$$W(-1; T_A) \ni p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, p_3 = \alpha p_2 \rightarrow p_2, p_3 \text{ は1次元従属}$$

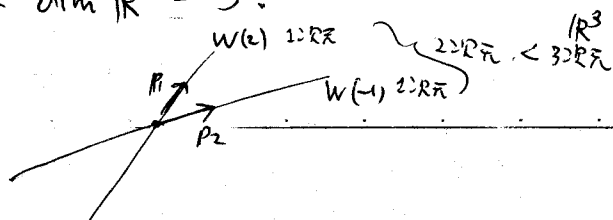
となる。よって  $A$  は対角化できない。



注

$$W(-1; T_A) + W(2; T_A) = 1 + 1 = 2 < \dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

このとき対角化はできない。





注意

(複素数体上の対角化)

複素数体上の対角化の場合でも同様に対角化できる。

$$T_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$f_A(\lambda) = 0$  より固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  に属する固有ベクトル  $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{C}^n$

のとき  $p_1, p_2, \dots, p_n$  が 1次独立であれば、

$$D = P^{-1}AP,$$

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

$$P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n]$$

と対角化できる。

まとめ

(対角化)

$n$ 次正方行列:  $A$   $n$ 個

$A$ の固有値:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (重複は別の  $\lambda$  として)

$\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_r$  (重複は同じ  $\tilde{\lambda}$  として)

$r$ 個  $\leq n$ 個

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  の固有ベクトル:  $p_1, p_2, \dots, p_n$

(1)  $p_1, p_2, \dots, p_n$  が 1次独立のとき

すなわち  $\sum_{i=1}^r \dim(W(\tilde{\lambda}_i; T_A)) = n$  のとき

(a) 固有値  $\lambda_i$  が全て実数のとき、実数体上で対角化可能である。

(b) 固有値  $\lambda_i$  の中に複素数が含まれるとき

(1) 複素数体上で対角化可能である。

(2) 実数体上では対角化不可能である。

→ 実標準形に分解

(2)  $p_1, p_2, \dots, p_n$  が 1次従属のとき

すなわち  $\sum_{i=1}^r \dim(W(\tilde{\lambda}_i; T_A)) < n$  のとき

対角化不可能である。

→ ジョルダン標準形に分解

**注意**

A が対角化可能なとき

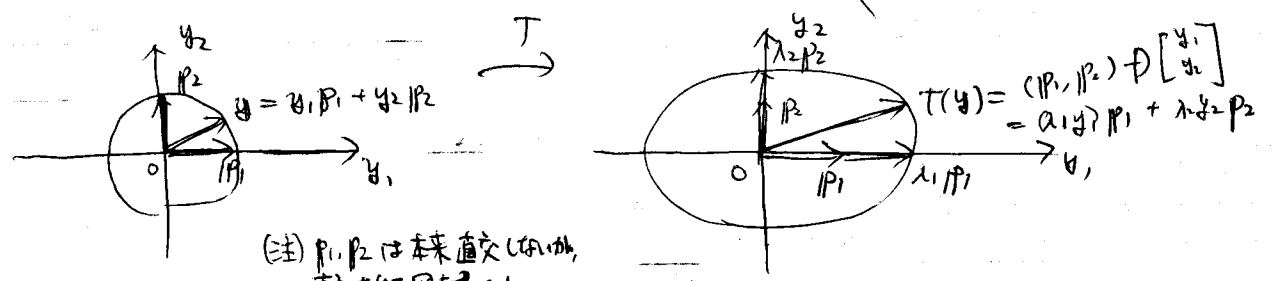
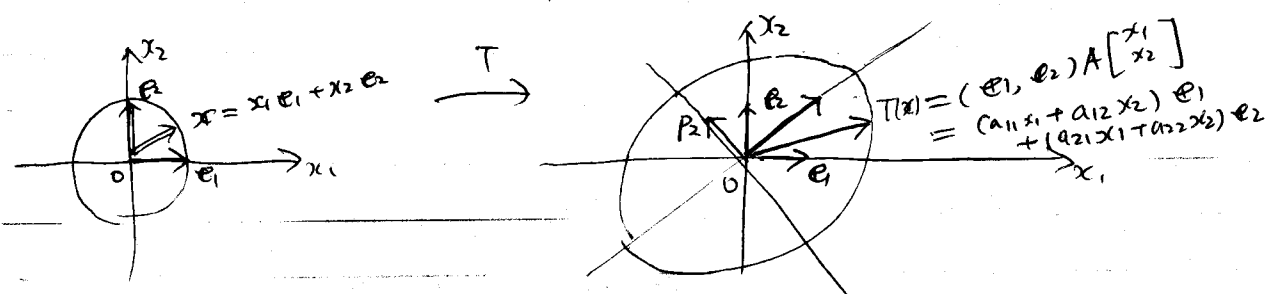
$$D = P^{-1}AP,$$

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$$

$D = P^{-1}AP$  に着目すると...

線形変換 T の基底  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  における表現行列を A とする  
基底変換して基底を  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  に取り換えると表現行列は D である。

$$\begin{aligned} (T(e_1), \dots, T(e_n)) &= (e_1, \dots, e_n)A \\ (T(p_1), \dots, T(p_n)) &= (p_1, \dots, p_n)D \end{aligned}$$



(注)  $p_1, p_2$  は本来直交 (orthogonal) 直交させて図を書くと、写像の性質がみやすくなる。

位置ベクトル  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$     座標系  $\{e_1, e_2\}$     座標  $(x_1, x_2)$

$\Downarrow$   $x = y$  基底のとりかえのみ。

$y = y_1 p_1 + y_2 p_2$     座標系  $\{p_1, p_2\}$     座標  $(y_1, y_2)$

$x = y \in T$  で書いたときの位置ベクトル  $T(x) = T(y)$  は

$$\begin{aligned} T(x) &= T(x_1 e_1 + x_2 e_2) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) = (T(e_1), T(e_2)) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (e_1, e_2)A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)e_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(x) = T(y) &\Downarrow \\ T(y) &= T(y_1 p_1 + y_2 p_2) = y_1 T(p_1) + y_2 T(p_2) = (T(p_1), T(p_2)) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = (p_1, p_2)D \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda_1 y_1) p_1 + (\lambda_2 y_2) p_2 \end{aligned}$$

座標系  $\{e_1, e_2\}$     座標  $(a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$   
座標系  $\{p_1, p_2\}$     座標  $(\lambda_1 y_1, \lambda_2 y_2)$

# 内積空間

## § 内積

### 定義 (標準的な内積)

$$\mathbb{R}^n \ni a, b \quad (a, b) = \overbrace{t a \overline{b}}^{\text{スカラーとみなす}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

$\mathbb{R}^n$  の標準的な内積

$$\mathbb{C}^n \ni a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{スカラーとみなす}$$

$$(a, b) = \overbrace{t a \overline{b}}^{\text{スカラーとみなす}} = a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2} + \dots + a_n \overline{b_n} = \sum_{k=1}^n a_k \overline{b_k}$$

$\mathbb{C}^n$  の標準的な内積

(注)  $\mathbb{C} \ni \alpha + i\beta, \overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta$   
 $\mathbb{R} \ni \alpha, \beta$  複素共役

### 定義 (内積)

$V: \mathbb{R}$  上のベクトル空間

$V \ni u, v$

$\mathbb{R} \ni (u, v)$

(1)  $(u+u', v) = (u, v) + (u', v)$

(2)  $(cu, v) = c(u, v), c \in \mathbb{R}$

(3)  $(v, u) = (u, v)$

(4)  $u \neq 0 \Rightarrow (u, u) > 0$

$V: \mathbb{C}$  上のベクトル空間

$V \ni u, v$

$\mathbb{C} \ni (u, v)$

(1)

(2)  $(cu, v) = c(u, v), c \in \mathbb{C}$

(3)  $(v, u) = \overline{(u, v)}$

(4)  $u \neq 0 \Rightarrow \mathbb{R} \ni (u, u) > 0$

演算  $(\cdot, \cdot)$  を 内積 (inner product) といい、

内積をもつベクトル空間を 内積空間 (inner product space) といい、

### 問

標準的な内積以上の性質(1)~(4)をみたすことを示せ。

**例** (内積の具体例)

$C(a, b)$ : 区間  $(a, b)$  で連続な関数の全体  $\Rightarrow C(a, b)$  はベクトル空間である。

$C(a, b) \ni f(x), g(x)$

内積  $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx \Rightarrow$  性質 (1) の形をみたす。  $(f, g)$  は内積である。  
 $C(a, b)$  は内積空間である。

**問** これを示せ。

### § ベクトルのノルム

**定義** (ノルム)

$V$ : 内積空間

$V \ni u$

$\|u\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(u, u)}$   $u$  のノルム (norm) または長さという。

(注)  $(u, u) \geq 0$  であることを注意。

**注意**

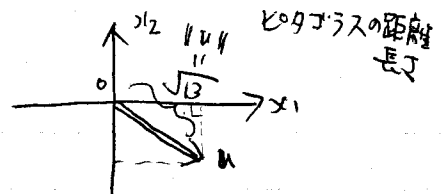
•  $\|u\| \geq 0$

•  $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

**例**

$\mathbb{R}^2 \ni u = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

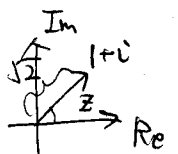
$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{3 \times 3 + (-2) \times (-2)} = \sqrt{13}$



$\mathbb{C} \ni z = 1+i$

$(z, z) = z\bar{z} = (1+i)(1-i) = (1+i)(1-i) = 1-i^2 = 1+1 = 2 > 0$

$\|z\| = \sqrt{(z, z)} = \sqrt{2}$



$\mathbb{C}^2 \ni z = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2-3i \end{bmatrix}, (z, z) = (1+i)(1+i) + (2-3i)(2-3i) = (1^2+1^2) + (2^2+3^2) = 15 > 0$

$\|z\| = \sqrt{(z, z)} = \sqrt{15}$

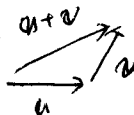
## 定理

$V$ : 実内積空間

$$(1) \|cu\| = |c| \|u\|$$

$$(2) |(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \quad (\text{シュワルツの不等式})$$

$$(3) \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (\text{三角不等式})$$



## 注

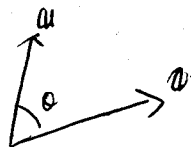
実内積空間  $\mathbb{R}^n$  において.

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \quad \text{より}$$

$$-1 \leq \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|} \leq 1 \quad \text{と存在.}$$

$$\cos \theta = \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|} \quad \text{とおく.}$$

$\theta$  を  $u, v$  のなす角とす.



## § ベクトルの直交

**定義**

(ベクトルの直交)

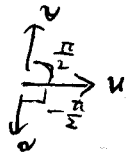
$V$ : 内積空間

$$(u, v) = 0 \iff u \text{ と } v \text{ は直交する}$$

**注意**

$\mathbb{R}^n$  において  $(u, v) = 0$  でありかつ

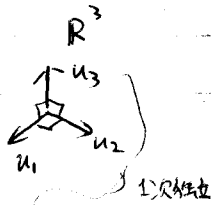
$$\cos \theta = \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|} = 0 \text{ 及び } \theta = \pm \frac{\pi}{2}$$



**定理**

$\mathbb{R}^n$  中で異なる  $u_1, u_2, \dots, u_r$  が互いに直交

$\Rightarrow u_1, u_2, \dots, u_r$  は 1 次独立



(証明)  $(u_i, u_j) = 0$  for  $i \neq j$

$$(u_i, u_i) \neq 0$$

$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_r u_r = 0$  を考える.

$i = 1, 2, \dots, r$  にそれぞれ  $u_i$  と内積

$$(c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_r u_r, u_i) = (0, u_i)$$

$$\underbrace{c_1 (u_1, u_i)}_0 + \underbrace{c_2 (u_2, u_i)}_0 + \dots + \underbrace{c_i (u_i, u_i)}_{\neq 0} + \dots + \underbrace{c_r (u_r, u_i)}_0 = 0$$

$$c_i (u_i, u_i) = 0$$

$$\Rightarrow c_i = 0 \text{ for } i = 1, 2, \dots, r.$$

以上より  $u_1, u_2, \dots, u_r$  は 1 次独立である。



## § 正規直交基底

### 定義

$V \ni u_1, u_2, \dots, u_n$  基底

(1)  $\|u_i\| = 1 \quad (i=1, 2, \dots, n)$     正規基底 (normal basis)

(2)  $(u_i, u_i) = 1 \quad (i=1, 2, \dots, n)$

$(u_i, u_j) = 0 \quad (1 \leq i < j \leq n)$

直交基底 (orthogonal basis)

(3)  $(u_i, u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$

$(1 \leq i, j \leq n)$

正規直交基底 (orthonormal basis)

### 例

$\mathbb{R}^n \ni e_1, e_2, \dots, e_n$  標準基底は正規直交基底である。

①  $\|e_i\| = \sqrt{(e_i, e_i)} = \sqrt{0+0+\dots+1+0+\dots+0} = 1$     ← 正規性

$(e_i, e_j) = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \times 0 + \dots + 1 \times 0 + \dots + 0 \times 1 + \dots + 0 \times 0 = 0$

↓  
直交性

②

### 例

$\mathbb{R}^2 \ni u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  は正規直交基底である。

①  $\|u_1\| = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$

$\|u_2\| = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + (-\frac{1}{\sqrt{2}}) \times (-\frac{1}{\sqrt{2}})} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$

} 正規性

$(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

← 直交性

②

**定義**

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{R}} = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\langle u_1, \dots, u_n \rangle_{\mathbb{R}} = \{x = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \mid \forall c_i \in \mathbb{R}\}$$

ベクトル空間をかえがに基底を  $v_1, \dots, v_n$  から  $u_1, \dots, u_n$  へ取り換える。

$u_1, \dots, u_n$  が正規基底となるように取り換えることを 正規化 (normalize) という。

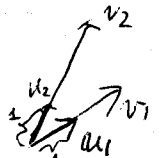
$\parallel$  直交基底  $\parallel$  直交化 (orthogonalize) という  
 $\parallel$  正規直交基底  $\parallel$  正規直交化 (orthonormalize) という

**定理**

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{R}} = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, u_n = \frac{v_n}{\|v_n\|} \quad \text{正規化.}$$

$$(\text{証明}) \quad (u_i, u_i) = \left( \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_i}{\|v_i\|} \right) = \frac{(v_i, v_i)}{\|v_i\| \|v_i\|} = \frac{\|v_i\|^2}{\|v_i\|^2} = 1 \quad \text{②}$$



**定理**

(グラム・シュミットの直交化法)

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{R}} = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle_{\mathbb{R}}$$

次の式より正規直交基底  $u_1, u_2, \dots, u_n$  が得られる。

$$\begin{aligned}
 v_1' &= v_1, \\
 v_2' &= v_2 - (v_2, u_1) u_1, \\
 v_3' &= v_3 - (v_3, u_1) u_1 - (v_3, u_2) u_2, \\
 v_4' &= v_4 - (v_4, u_1) u_1 - (v_4, u_2) u_2 - (v_4, u_3) u_3, \\
 &\vdots \\
 v_n' &= v_n - \sum_{i=1}^{n-1} (v_n, u_i) u_i,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{v_1'}{\|v_1'\|} \\
 u_2 &= \frac{v_2'}{\|v_2'\|} \\
 u_3 &= \frac{v_3'}{\|v_3'\|} \\
 u_4 &= \frac{v_4'}{\|v_4'\|} \\
 &\vdots \\
 u_n &= \frac{v_n'}{\|v_n'\|}
 \end{aligned}$$

(証明)

$$(u_1, u_1) = \left( \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_1}{\|v_1\|} \right) = \frac{1}{\|v_1\|^2} (v_1, v_1) = \frac{\|v_1\|^2}{\|v_1\|^2} = 1.$$

$$(u_1, u_2) = \left( u_1, \frac{1}{\|v_2'\|} (v_2 - (v_2, u_1) u_1) \right) = \frac{1}{\|v_2'\|} \left( (u_1, v_2) - (v_2, u_1) (u_1, u_1) \right) = 0.$$

以下同様





例

$\mathbb{R}^3 \ni v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  を正規直交化する.

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} //$$

$$v_2' = v_2 - (v_2, u_1)u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} //$$

$$v_3' = v_3 - (v_3, u_2)u_2 - (v_3, u_1)u_1$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-2-1+1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2-1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 12-4-3 \\ -6+4-3 \\ 6+4-0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{5}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

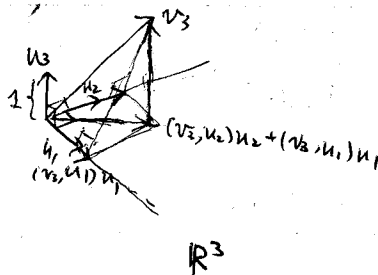
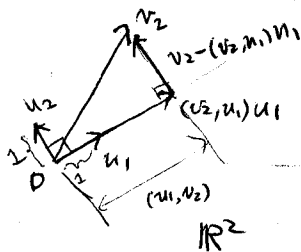
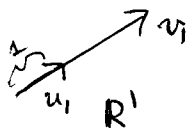
$$u_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \left( \frac{25(1+1+4)}{36} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{5}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} //$$

以上より  $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle_{\mathbb{R}}$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}$$

加法的に、



右

## § 直交変換

定理

$V \ni u_1, \dots, u_n$  正規直交規底

$V \ni \forall u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n, \forall v = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n$

$$\Leftrightarrow (u, v) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

(証明)

$$\begin{aligned} (u, v) &= \left( \sum_{i=1}^n a_i u_i, \sum_{j=1}^n b_j u_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j (u_i, u_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \delta_{ij} \leftarrow \begin{matrix} i=j \text{ なら } \delta_{ij}=1 \\ \text{それ以外なら } 0 \end{matrix} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i b_i \end{aligned}$$

□

定義

$T: V \rightarrow V$  線形変換

$$(T(u), T(v)) = (u, v) \quad \forall u, v \in V$$

$\Leftrightarrow T$  は 直交変換 (orthogonal transformation) である。

定理

$T$ : 直交変換

$V \ni u_1, \dots, u_n$  正規直交基底

$\Leftrightarrow T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)$  は正規直交基底。

(証明)

$$(\Rightarrow) (T(u_i), T(u_j)) = (u_i, u_j) = \delta_{ij}$$

例

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_2, T(e_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1$$

$$T: \{e_1, e_2\} \rightarrow \{e_2, e_1\}$$

正規直交                  正規直交

$\mathbb{R}^2 \ni e_1, e_2$  基底

$$\mathbb{R}^2 \ni a = a_1 e_1 + a_2 e_2 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^2 \ni b = b_1 e_1 + b_2 e_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$T(a) = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}, T(b) = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$(T(a), T(b)) = a_2 b_2 + a_1 b_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 = (a, b)$$

$\Rightarrow T$  は直交変換

## § 直交行列

定義

(直交行列)

$P$ :  $n$  次正方行列

$${}^t P P = E \Leftrightarrow P \text{ は直交行列 (orthogonal matrix) である.}$$

注意

(1)  $P$  は正則である.  $\textcircled{1} {}^t P P = E \Rightarrow \det({}^t P P) = \det(E) \Rightarrow \det({}^t P) \times \det(P) = 1$   
 $\Rightarrow (\det(P))^2 = 1 \Rightarrow \det P = \pm 1 \neq 0$  ✓

(2)  $P^{-1} = {}^t P$

$\textcircled{1} {}^t P P = E \Rightarrow {}^t P P P^{-1} = E P^{-1} \Rightarrow {}^t P = P^{-1}$  ✓

例

直交行列  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = R(\theta)$

$\textcircled{2} {}^t R(\theta) R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ✓

**定理**

$$T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad T_A(x) = Ax.$$

A が直交行列  $\Leftrightarrow T_A$  が直交変換

(証明)  $T(e_j) = Ae_j = a_j$  であり  $T(e_1, \dots, e_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)$  である。  $a_1, \dots, a_n$  が正規直交基底であるならば  $T_A$  は直交変換であることが分かる。  $\square$

**定理**

$$A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$$

A が直交行列  $\Leftrightarrow a_1, \dots, a_n$  は  $\mathbb{R}^n$  の正規直交基底

(証明)

$$A^T A = E \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t_{a_1} \\ t_{a_2} \\ \vdots \\ t_{a_n} \end{bmatrix} [a_1 \ \dots \ a_n] = E \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t_{a_1} a_1 & t_{a_1} a_2 & \dots & t_{a_1} a_n \\ t_{a_2} a_1 & t_{a_2} a_2 & \dots & t_{a_2} a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{a_n} a_1 & t_{a_n} a_2 & \dots & t_{a_n} a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow t_{a_i} a_j = \delta_{ij} \Leftrightarrow (a_i, a_j) = \delta_{ij} \Leftrightarrow a_1, \dots, a_n \text{ は正規直交基底} \quad \square$$

**例**

クラウシットの直交化法で正規直交化したベクトル  $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

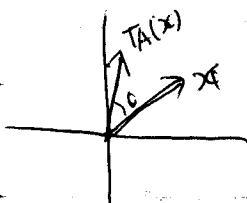
$$P = [u_1 \ u_2 \ u_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \text{ は直交行列である。}$$

$$\odot P^T P = E \Leftrightarrow (u_i, u_j) = \delta_{ij}$$

**例**

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

- (1)  $x$  と  $T_A(x)$  との成す角は  $\theta$  である。
  - (2)  $x$  と  $T_A(x)$  の長さは等しい。
- ①② を示せ。



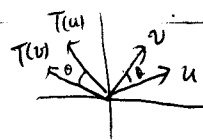
A を  $\mathbb{R}^2$  の回転行列という。

③ 任意の  $2 \times 2$  型直交行列は回転行列で表される。

**例**

T: 直交変換  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$u, v$  の成す角と  $T(u), T(v)$  の成す角は等しい。



## § 対称行列の対角化

正方行列は  $A = P^{-1} D P$  と対角化される。

$P$  は正則行列で、 $P = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n]$  と表される。

$P_1, \dots, P_n$  は固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  の固有ベクトルである。

実対称行列  $A$  を直交行列  $P$  で対角化する。

すなわち、 $P_1, \dots, P_n$  を  $\mathbb{R}^n$  の正規直交基底にとる。

$\mathbb{R}^n$  の標準的な内積を変えない。 → 直交基底  
ユークリッド空間との対応がわかりやすい。

定義

$A^t = A$  をみたす行列を対称行列 (symmetric matrix) といい

注意

対称行列は  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$  と表される。

定義

複素行列  $A = [a_{ij}]$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{C}$

$\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} [\overline{a_{ij}}]$  共役行列

注意

$\mathbb{C} \ni \alpha = a + i\beta$  ( $i = \sqrt{-1}$ ,  $a, \beta \in \mathbb{R}$ )

$\overline{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} a - i\beta$

$\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha} \pm \overline{\beta}$ ,  $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \overline{\beta}$ ,  $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

$\mathbb{R} \ni |\alpha| = \sqrt{\alpha \overline{\alpha}} = \sqrt{a^2 + \beta^2} \geq 0$   
絶対値 (absolute value)

$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$

$\overline{\overline{-\alpha}} = -\alpha \Leftrightarrow \alpha$  は純虚数

## 定理

実対称行列の固有値は全て実数である。

(証明)

$$\left( \begin{array}{l} x, y \in \mathbb{C}^n \text{ のとき } (x, y) \stackrel{\text{def}}{=} {}^t x \bar{y}. \quad (x, y) = \overline{(y, x)}. \quad (x, x) = \overline{(x, x)}. \\ \mathbb{R} \ni \|x\|^2 = (x, x) = {}^t x \bar{x} = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \geq 0 \end{array} \right)$$

$$Ax = \lambda x \quad \left. \begin{array}{l} x \neq 0 \\ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ x \in \mathbb{C}^n \\ \lambda \in \mathbb{C} \end{array} \right\} \text{ 仮定} \quad (\lambda x, x) = \lambda (x, x) = \lambda \|x\|^2$$

$$\begin{aligned} (\lambda x, x) &= \overline{(x, \lambda x)} = \overline{(x, Ax)} = \overline{{}^t x (A\bar{x})} = \overline{{}^t x (A\bar{x})} = \overline{{}^t x A\bar{x}} \\ &= \overline{{}^t (A^t x) \bar{x}} = \overline{{}^t (Ax) \bar{x}} = \overline{{}^t (\lambda x) \bar{x}} = \overline{\lambda {}^t x \bar{x}} \\ &= \overline{\lambda} \overline{{}^t x \bar{x}} = \overline{\lambda} \overline{\|x\|^2} = \overline{\lambda} \|x\|^2 \end{aligned}$$

よって  $\lambda \|x\|^2 = \overline{\lambda} \|x\|^2$  となる。  $x \neq 0$  のとき  $\|x\|^2 > 0$  より

$\lambda = \overline{\lambda}$  である。 よって  $\lambda$  は実数である。 □

## 注意

実対称行列の固有値は実数のほかに、固有ベクトルは実ベクトルとなる。

## 例

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  実対称行列。

$$g_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda - 1)$$

$g_A(\lambda) = 0$  より 固有値は  $\lambda = 1, -3 \in \mathbb{R}$  となる。 □

定理

実対称行列の互いに異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。

(証明)

A: 実対称行列. ( $tA=A$ )

$Au = \lambda u, Av = \mu v, \lambda \neq \mu$  とする. ( $u, v \in \mathbb{R}^n; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned} \lambda(u, v) &= (\lambda u, v) = (Au, v) = {}^t(Au)v = {}^t u {}^t A v = (u, {}^t A v) = (u, Av) \\ &= (u, \mu v) = \mu(u, v) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\lambda - \mu)(u, v) = 0 \quad \Rightarrow \lambda \neq \mu \text{ のとき } (u, v) = 0 \quad \Rightarrow u \text{ と } v \text{ は直交する。}$$

(3)

定理

実対称行列 A は

$$A = P^{-1} D P$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P = [p_1 \quad \dots \quad p_n] \leftarrow \text{直交行列} \quad (p_i, p_j) = \delta_{ij}$$

と対角化できる。

例1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & -1 \\ 2 & & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{実対称行列.}$$

$$\text{固有方程式} \quad g_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ -2 & \lambda+2 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+4)$$

$g_A(\lambda) = 0$  の固有値は  $\lambda = 2$  (2重),  $-4$  である。

固有空間

$$2E - A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-4E - A = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よ

$$W(2, A) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \forall c_1, \forall c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W(-4, A) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \forall c_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

よ。基底を定めよう。

$$W(2) \ni v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{基底}$$

$$\dim W(2) = 2$$

$$W(-4) \ni v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{基底}$$

$$\dim W(-4) = 1$$

よ。  $v_1, v_2, v_3$  は 1次独立であるから  $\mathbb{R}^3 = W(2) + W(-4)$  と表される。よ、 $A$  は対角化可能である。

$$(v_1, v_3) = 0, (v_2, v_3) = 0, (v_1, v_2) = -2 \neq 0$$

よ、  $v_1$  と  $v_3$  は直交、  $v_2$  と  $v_3$  は直交、  $v_1$  と  $v_2$  は直交しない。

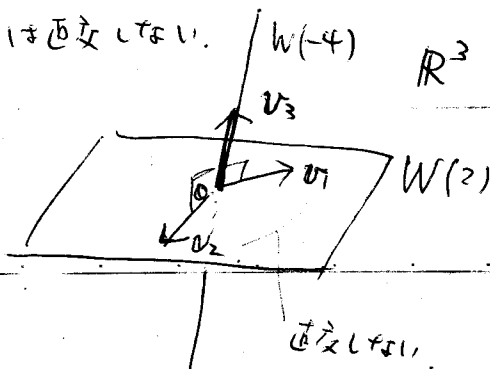
$W(2)$  と  $W(-4)$  は直交する。

$$\mathbb{R}^3 \ni \forall x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$$

$v_1, v_2, v_3$  は  $\mathbb{R}^3$  の正規直交基底とは

$$W(2) \oplus W(-4)$$

ならない。



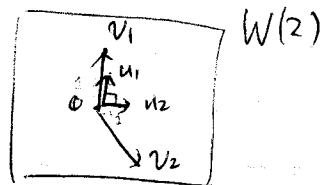


$W(2)$  の基底として 正規直交基底  $u_1, u_2$  をえらぶ.

$v_1, v_2$  をグラム-シュミットの直交化法で.

正規直交化する.

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{4+1+0}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} v_2' &= v_2 - (v_2, u_1)u_1 \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-2+0+0}{\sqrt{5}\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{1}{\frac{1}{5}\sqrt{1+4+25}} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

よって  $W(2)$  の正規直交基底として

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (\odot u_i, u_j = \delta_{ij} \text{ である})$$

を得る.  $v_3$  を正規化して  $W(4)$  の正規直交基底

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を得る. したがって

$$W(2) \oplus W(4) = \mathbb{R}^3 \ni \forall x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$$

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}$$

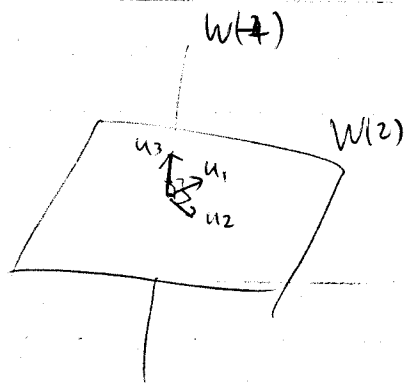
であるから  $u_1, u_2, u_3$  は  $\mathbb{R}^3$  の正規直交基底である.

以上より

$$A = P^{-1} D P$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -4 \end{bmatrix}, \quad P = [u_1, u_2, u_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

と、直交行列  $P$  により対角化した.



## § ベクトル空間の和

**定義**

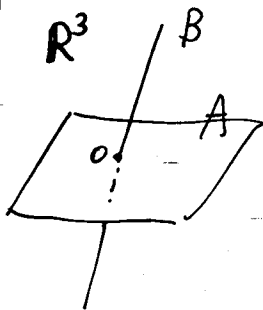
$A, B$ : ベクトル空間

$$A+B = \{a+b \mid \forall a \in A, \forall b \in B\}$$

$A \cap B = \{0\}$  のとき  $A \oplus B$  と表す。

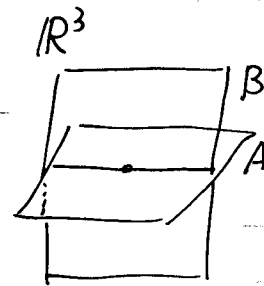
$\oplus$  は 直和 という。

**例**



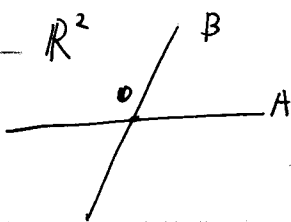
$$\mathbb{R}^3 = A+B = A \oplus B$$

3次元 2次元, 1次元



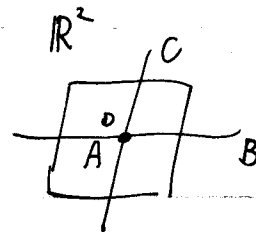
$$\mathbb{R}^3 = A+B$$

3次元 2次元 2次元



$$\mathbb{R}^2 = A+B = A \oplus B$$

2次元 1次元 1次元



$$\mathbb{R}^2 = A+B+C$$

2次元 2次元 1次元 1次元

**例**

正方行列  $A$  が対角化可能

$$\Leftrightarrow \mathbb{R}^n = W(\lambda_1) \oplus W(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_r)$$

## § 直交補空間

**定義** (直交補空間)

$V$ : 内積空間

$V \supset W$ : 内積空間

$$W^\perp = \{ u \in V \mid (u, v) = 0, \forall v \in W \}$$

$W^\perp$  を  $W$  の  $V$  における 直交補空間 という

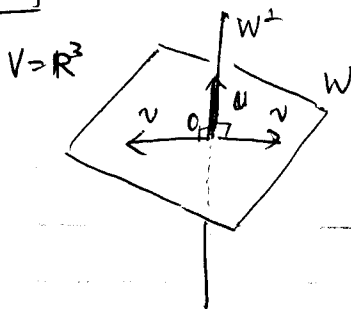
**定理**

$W^\perp$  は  $V$  の部分空間である。

**問**

これを示せ。

**例** (直交補空間の具体例)



$$W = \{ (x_1, x_2, 0) \mid \forall x_1, \forall x_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$W^\perp = \{ (0, 0, x_3) \mid \forall x_3 \in \mathbb{R} \}$$

(証明)  $v = (x_1, x_2, 0), u = (0, 0, x_3)$  より

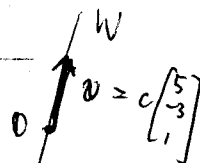
$$(u, v) = 0 \times x_1 + 0 \times x_2 + 0 \times x_3 = 0 \Rightarrow u, v \text{ は直交} \quad \square$$

**例** (直交補空間の具体例)

$$\mathbb{R}^3 \supset W = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \}$$

$W$  は  $Ax = 0$  の解空間だから  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  より

$$W = \left\{ v = c \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \forall c \in \mathbb{R} \right\}$$



$$v = {}^t(5c, -3c, c), u = {}^t(x_1, x_2, x_3) \text{ とおくと } (u, v) = 0 \text{ より}$$

$$5c \times x_1 + (-3c) \times x_2 + c \times x_3 = 0 \rightarrow 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$

よって  $W^\perp = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \}$  を得る.

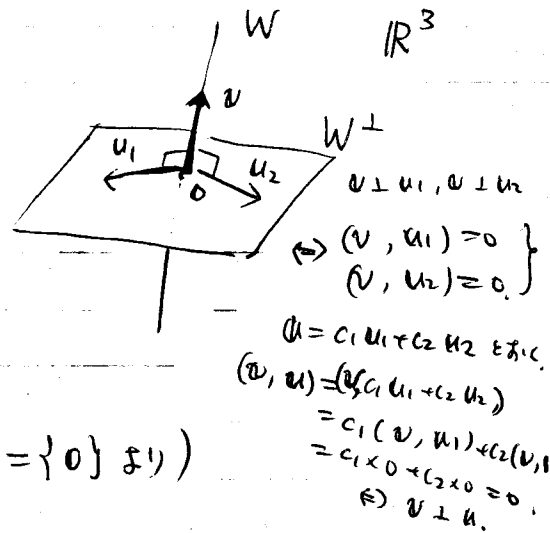
$W^\perp$  は方程式  $\tilde{A}x = 0$  の解空間である.

$$\tilde{A} = [5 \ -3 \ 1] \rightarrow [1 \ -3/5 \ 1/5]$$

より

$$W^\perp = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 3/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \forall c_1, \forall c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\underbrace{\quad}_{u_1} \qquad \qquad \underbrace{\quad}_{u_2}$



$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim W + \dim W^\perp$$

$$3 = 1 + 2$$

$$\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp \quad (W \cap W^\perp = \{0\} \text{ より})$$

$\uparrow$   
直和

**定義** (ベクトル空間の和, 直和)

$A, B$ : ベクトル空間

ベクトル空間の和:  $A+B = \{ a+b \mid \forall a \in A, \forall b \in B \}$

$A \cap B = \{0\}$  のとき  $A+B$  は特に  $A \oplus B$  と表す.

$\oplus$  は 直和 と呼ぶ.

**例**

$A$ : 実対称行列

$$\mathbb{R}^n = W(\lambda_1) \oplus W(\lambda_2) \oplus \dots \oplus W(\lambda_r)$$

$\mathbb{R}^n$  における  $W(\lambda_i)$  の直交補空間

## § エルミート行列の対角化

定義

$A^* \equiv \overline{tA} = {}^t(\overline{A})$  共役転置行列  
Aの複素行列になる。

定義

$A^* = A$  である行列を エルミート行列 (Hermitian matrix) といふ。  
 $A^* = -A$  である行列を 歪エルミート行列 (skew Hermitian matrix) といふ。  
 $A^*A = E$  である行列を ユニタリ行列 (unitary matrix) といふ。

注意

- (1) エルミート行列の対角成分は全て実数である。
- (2) 歪エルミート行列の対角成分は全て純虚数である。

問

これを示せ。

注意

Aの要素が全て実数ならば  $A^* = {}^tA$  である。

エルミート行列は 対称行列。

歪エルミート行列は 歪対称行列。

ユニタリ行列は 直交行列 と なる。

**定理**

エルミート行列の固有値は全て実数である。

① これを示せ。

**定理**

エルミート行列はユニタリ行列  $U$  により  $A = U^* D U$  と対角化される。