解析学II

近藤弘一

最終更新日：平成 18 年 1 月 18 日

目 次

1 空間の図形 **1**
1.1 $\mathbb{R}^n$ の直線 1
1.2 $\mathbb{R}^2$ の直線 2
1.3 $\mathbb{R}^3$ の直線と平面 4
1.4 平行四辺形の面積 7
1.5 演習問題 ~ 直線，平面 8

2 偏微分 **10**
2.1 2 変数関数 10
2.2 極限 12
2.3 連続性 14
2.4 多変数関数の微分 16
2.5 偏微分 17
2.6 n 変数関数の偏微分 19
2.7 高階偏微分 20
2.8 ランダウの記号 22
2.9 1 変数関数の微分 25
2.10 全微分 27
2.11 n 変数関数の全微分 28
2.12 全微分と偏微分 28
2.13 全微分と連続 30
2.14 1 変数関数の合成関数の微分 31
2.15 2 変数関数 と 1 変数関数の合成関数の微分 32
2.16 2 変数関数 と 2 変数関数の合成関数の微分 34
2.17 n 変数関数と 1 変数関数の合成関数の微分 35
2.18 n 変数関数と m 変数関数の合成関数の微分 36

2.19 偏微分作用素 . . . 37
2.20 座標変換 . . . 38
2.21 斜交座標 . . . 39
2.22 2 次元空間の極座標 . . . 44
2.23 3 次元空間の極座標 . . . 48
2.24 調和関数 . . . 50
2.25 方向微分 . . . 51
2.26 ライプニッツ則 . . . 52
2.27 テイラー展開 . . . 53
2.28 n 変数関数のテイラー展開 . . . 56
2.29 平均値の定理 . . . 56
2.30 1 変数の陰関数 . . . 57
2.31 接線 . . . 61
2.32 2 変数の陰関数 . . . 63
2.33 陰関数の高階導関数 . . . 66
2.34 接平面 . . . 68
2.35 極値 . . . 71
2.36 条件付き極値問題 . . . 76

3 多重積分 **83**
3.1 多重積分 . . . 83
3.2 累次積分 . . . 87
3.3 2 重積分の計算 . . . 88
3.4 3 重積分の計算 . . . 92
3.5 積分の順番の入れ替え . . . 94
3.6 長方形領域における積分 . . . 96
3.7 多重積分の置換積分 . . . 98
3.8 斜交座標への置換積分 . . . 100
3.9 極座標への置換積分 . . . 102
3.10 3 次元極座標への置換積分 . . . 104
3.11 体積の計算 . . . 106
3.12 曲面積 . . . 111
3.13 多重積分の広義積分への応用 . . . 113
3.14 有向曲線 . . . 115
3.15 線積分 . . . 117
3.16 経路の異なる積分路における線積分 . . . 118
3.17 線積分と多重積分 . . . 120
3.18 経路に依存しない線積分 . . . 122
3.19 線積分による面積の計算 . . . 124

1 空間の図形

§ 1.1 $\mathbb{R}^n$ の直線

定義 1.1 （位置ベクトル） $\mathbb{R}^n$ の空間の点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して，列ベクトル

$$\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}$$

を点 P の位置ベクトル（**position vector**）という．点 P とベクトル $\boldsymbol{x}$ を同一視する． □

定義 1.2 （直線） $\mathbb{R}^n$ の点 $\boldsymbol{x}$ がパラメータ $t \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{p}$$

と表されるとする．このとき点 $\boldsymbol{x}(t)$ の軌跡を直線（**line**）という．$\boldsymbol{p}$ を方向ベクトル（**direction vector**）という． □

定理 1.3 （内分点） $\mathbb{R}^n$ の点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を通る直線をむすび，その直線上の点で点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ からの距離の比が $t : 1-t$ となる点 $\boldsymbol{c}$ は

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$$

で与えられる．$0 < t < 1$ のとき点 $\boldsymbol{c}$ を 点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内分点（**internally dividing point**）といい，$t < 0, 1 < t$ のとき外分点（**externally dividing point**）という． □

定義 1.4 （直線） $\mathbb{R}^n$ の点 $\boldsymbol{x}$ がパラメータ $t, s \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{p} + s\boldsymbol{q}$$

と表されるとする．このとき点 $\boldsymbol{x}(t)$ の軌跡を平面（**plane**）という． □

§ 1.2 $\mathbb{R}^2$ の直線

注意 1.5 （直線の方程式） xy 平面内の直線の方程式は

$$y = ax + b$$

と表される．a は傾きを表し，b は y 切片である．また，式変形して

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

と表すと，a は x 切片であり，b は y 切片を表す．式変形すると様々な意味をもつ．通常，直線の方程式の標準形は，非同次 1 次方程式

$$ax + by + c = 0$$

の形で表す． □

注意 1.6 （直線の方程式と方向ベクトル） xy 平面内の直線を

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

と表す．このとき，パラメータ t を用いてベクトルで表記すると

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

とパラメータ表示される．$\boldsymbol{p}$ は直線の向きを表し，方向ベクトル（**direction vector**）という． □

注意 1.7 （直線の方程式と法線ベクトル） xy 平面内の直線を

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

と表す．このとき，ベクトルで表記すると

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0, \qquad \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

と表される．$\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ であり，$\boldsymbol{n}$ は直線に直交するベクトルである．$\boldsymbol{n}$ を法線ベクトル（**normal vector**）という． □

例 1.8 （直線） 2 点 $A(2, -3), B(-1, 1)$ を通る直線を考える．この直線の方向ベクトルは

$$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

である．直線の方程式のパラメータ表示は

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3t \\ -3+4t \end{bmatrix}$$

である．$x = 2-3t, y = -3+4t$ で t を消去すると

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+3}{4}$$

となる．式変形して

$$4(x-2) + 3(y+3) = 0$$

とする．この式より，この直線は法線ベクトルが

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

で点 $(2, -3)$ を通る直線である．さらに式変形して一般形で表すと

$$4x + 3y + 1 = 0$$

である．また，式変形して

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}, \qquad \frac{x}{-\frac{1}{4}} + \frac{y}{-\frac{1}{3}} = 1$$

とする．直線の傾きは $-\frac{4}{3}$ であり，x 切片は $-\frac{1}{4}$ で y 切片は $-\frac{1}{3}$ である．

次にこの直線と直交し点 $A(2, -3)$ を通る直線を考える．法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が方向ベクトルとるので，法線の方程式は

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{3}$$

である．式変形すれば

$$3(x-2) - 4(y+3) = 0, \quad 3x - 4y - 18 = 0, \quad y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{2}, \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{-\frac{9}{2}} = 1$$

と書ける．法線は傾きが $\frac{3}{4}$ で，x 切片が 6 で，y 切片が $-\frac{9}{2}$ で，法線ベクトルが $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ である．

□

§ 1.3 $\mathbb{R}^3$ の直線と平面

定義 1.9 （直線） xyz 空間における直線は，パラメータ t を用いてベクトルで表すと，

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

と書ける．$\boldsymbol{p}$ は方向ベクトルである．成分で表すと，$\mathbb{R}^3$ の直線の方程式

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

が得られる． □

定義 1.10 （平面の方程式） xyz 空間内の平面の方程式は

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

と表される．ベクトルで表記すると

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$$

となる．$\boldsymbol{n}$ を法線ベクトルという． □

注意 1.11 （平面，直線） x, y, z に関する非同次 1 次方程式の一般形は

$$ax + by + cz + d = 0$$

である．この方程式は xyz 空間内の法線ベクトルが $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ で点 $(0, 0, -d/c)$ を通る平面を表す．非同次 1 次方程式を 2 本の方程式で連立すると

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

である．方程式のそれぞれは法線ベクトルが $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix}^T$ と $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}^T$ の平面を表す．よって，この連立方程式の解集合は，2 つの平面の共有点の集合である直線となる． □

例 1.12 （直線） 2 点 $A(1, 1, -2), B(3, 0, 1)$ を通る xyz 空間内の直線を考える．この直線の方向ベクトルは

$$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

である．直線のパラメータ表示は

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2t \\ 1-t \\ -2+3t \end{bmatrix}$$

となる．$x = 1+2t, y = 1-t, z = -2+3t$ で t を消去すると，直線の方程式

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

を得る．

□

例 1.13 （平面） 3 点 $A(1,1,-2), B(3,0,1), C(2,1,-1)$ を通る xyz 空間内の平面を考える．法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_x + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_y + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_z = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であり，点 $A(1,1,-2)$ を通るので，$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \overrightarrow{OA}) = 0$ より平面の方程式

$$-(x-1) + (y-1) + (z+2) = 0$$

を得る．一般形で書けば

$$x - y - z - 2 = 0$$

となる．さらに変形して

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{-2} + \frac{x}{-2} = 1$$

とする．平面と x 軸，y 軸，z 軸の交点はそれぞれ $x = 2, y = -2, z = -2$ である．

□

例 1.14 （平面） 3 点 $A(1,1,-2), B(3,0,1), C(2,1,-1)$ を通る xyz 空間内の平面を考える．平面の方程式の一般形は

$$ax + by + cz + 1 = 0$$

であるから，これに各点の座標を代入すると連立方程式

$$a + b - 2c + 1 = 0, \quad 3a + c + 1 = 0, \quad 2a + b - c + 1 = 0$$

を得る．この方程式の解は

$$(a, b, c) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

である．よって平面の方程式は $x - y - z - 2 = 0$ となる．

□

例 1.15 （直線） 連立方程式

$$x-y-z-2=0, \quad 2x+y-z-5=0$$

で定まる直線を考える．この直線は 2 つの平面の共有点である．第 2 式から第 1 式を引いて z を消去すると

$$x+2y-3=0$$

であり，第 1 式と第 2 式を足して y を消去すると

$$3x-2z-7=0$$

となる．これらより

$$x=\frac{y-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=\frac{z+\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2}=\frac{y-\frac{3}{2}}{-1}=\frac{z+\frac{7}{2}}{3}$$

を得る．直線は点 $(0,\frac{3}{2},-\frac{7}{2})$ を通り，方向ベクトル $\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix}^T$ の直線である．また，パラメータ表示すると

$$x=2t, \quad y=-t+\frac{3}{2}, \quad z=3t-\frac{7}{2}$$

である．t は任意であるから，t を $t+\frac{1}{2}$ と置き換えると，

$$x=2t+1, \quad y=-t+1, \quad z=3t-2$$

となり，式が簡単となる．このとき平面の方程式は

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}$$

となる．直線は点 $(1,1,-2)$ も通る． □

例 1.16 （直線） 連立方程式

$$x-y-z-2=0, \quad 2x+y-z-5=0$$

で定まる直線を考える．この直線は 2 つの平面の解集合であるから，連立方程式

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}$$

を解く．拡大係数行列を簡約化すると

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 5\end{bmatrix} \overset{\text{簡約化}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix}1 & 0 & -2/3 & 7/3\\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3\end{bmatrix}$$

となる．このとき方程式は

$$x - \frac{2}{3}z = \frac{7}{3}, \quad y + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}$$

と変形される．階数が 2 であるから，任意定数は 1 個であるので，任意定数 t を $z = t$ とおくと，

$$x = \frac{2}{3}t + \frac{7}{3}, \quad y = -\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}, \quad z = t$$

を得る．t は任意定数であるから，t を $3t - 2$ と置き換えると，

$$x = 2t + 1, \quad y = -t + 1, \quad z = 3t - 2$$

を得る．t を消去すると平面の方程式

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

を得る．

□

§ 1.4 平行四辺形の面積

定理 1.17 （平行四辺形の面積） 点 O, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $D(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ からなる平行四辺形 $OADB$ の面積は

$$S = \mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

で与えられる．

（証明） まず，

$$\theta = \angle AOB, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

とおく．すると，

$$\begin{aligned} S &= \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta)^2} && (1) \\ &= \sqrt{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} = \sqrt{({a_1}^2 + {a_2}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2} && (2) \\ &= \sqrt{{a_1}^2{b_2}^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + {a_2}^2{b_1}^2} = \sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2} = |a_1b_2 - a_2b_1| && (3) \\ &= \mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right) && (4) \end{aligned}$$

と得られる．

□

§ 1.5 演習問題 ~ 直線，平面

問 1.18 (直線)　次の $\mathbb{R}^2$ の直線に関して，傾き，y 切片，x 切片，方向ベクトル，法線ベクトルを求めよ．また，この直線に直交し原点を通る法線を求めよ．

(1)　$y = 3x - 2$　　(2)　$3x - 2y + 5 = 0$　　(3)　2 点 $(3, 2), (1, -2)$ を通る直線

(4)　$\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2}$　　(5)　$\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 1$

□

問 1.19 (直線)　次の $\mathbb{R}^2$ の直線をパラメータ表示で表せ．また，直線の方向ベクトル，法線ベクトル，x 切片，y 切片，傾きを求めよ．さらには，この直線に直交し点 $(1, 2)$ を通る法線を求めよ．

(1)　点 $(1, -1), (2, 3)$ を通る直線　　(2)　点 $(0, 2), (1, 0)$ を通る直線

(3)　点 $(-3, 1), (4, 2)$ を通る直線　　(4)　点 $(2, 1), (5, -1)$ を通る直線

(5)　$\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{4}$　　(6)　$\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+2}{-3}$　　(7)　$\dfrac{x-5}{-3} = \dfrac{y-3}{5}$　　(8)　$\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{-1}$

(9)　$y = 2x - 1$　　(10)　$y = -2x + 3$　　(11)　$y = 4x - 3$　　(12)　$y = -3x - 5$

(13)　$3x + 2y + 5 = 0$　　(14)　$-x + y + 1 = 0$　　(15)　$2x - y - 2 = 0$

(16)　$-x - 3y + 1 = 0$　　(17)　$\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$　　(18)　$\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{4} = 1$

(19)　$\dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{-5} = 1$　　(20)　$\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{-3} = 1$

□

問 1.20 (平面)　次の $\mathbb{R}^3$ の平面の法線ベクトルを求めよ．

(1)　$2x - y + 3z + 4 = 0$　　(2)　3 点 $(1, 2, -1), (0, 2, 1), (0, 2, 1)$ を通る平面

□

問 1.21 (平面)　次の 3 点を通る $\mathbb{R}^3$ の平面の方程式を求めよ．

(1)　点 $(1, 2, -1), (0, 1, 2), (3, -1, 0)$　　(2)　点 $(0, 1, 2), (-1, 2, -1), (2, 0, -3)$

(3)　点 $(4, 0, 2), (2, -1, 0), (2, 1, 1)$　　(4)　点 $(0, 1, 2), (3, -1, 0), (2, 4, 0)$

□

問 1.22 (直線)　次の $\mathbb{R}^3$ の直線の方向ベクトルを求めよ．

(1)　$2x + 3y = 1, 3y + 4z = 2$　　(2)　$2x + 3y - z = 1, x - 2y + z = -1$

(3)　2 点 $(1, 2, -1), (0, 2, 1)$ を通る直線

□

問 1.23 (平面)　次の 2 点を通る $\mathbb{R}^3$ の直線をパラメータ表示と成分表示で表せ．

(1)　点 $(1, 2, -1), (0, 1, 2)$　　(2)　点 $(0, 1, 2), (-1, 2, -1)$　　(3)　点 $(4, 0, 2), (2, -1, 0)$

(4)　点 $(0, 1, 2), (3, -1, 0)$

□

問 1.24 (平面)　次の $\mathbb{R}^3$ の直線をパラメータ表示せよ．

(1)　$2x + 3y + z + 1 = 0, x - y + 2z - 1 = 0$　　(2)　$x - y + 2z - 2 = 0, 3x + 2y - z + 5 = 0$

□

問 1.25 (平面)　次の $\mathbb{R}^3$ の平面と直交し点 $(1,2,3)$ を通る直線の方程式を求めよ．また，その交点を求めよ．

(1)　$2x+3y+1=0$　　(2)　$-x+2y-2=0$　　(3)　$3x-y+2=0$　　(4)　$-3x-2y+3=0$

□

問 1.26 (平面)　次の $\mathbb{R}^3$ の直線と直交し点 $(1,2,3)$ を通る直線の方程式を求めよ．また，その交点を求めよ．

(1)　$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$　　(2)　$\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-2}$　　□

問 1.27 (平行四辺形の面積)　次の 4 点からなる平行四辺形の面積を求めよ．

(1) $(0,0)$, $(1,3)$, $(3,4)$, $(2,1)$　　(2) $(0,0)$, $(-3,1)$, $(-1,3)$, $(2,2)$

(3) $(-2,0)$, $(0,2)$, $(3,0)$, $(1,-2)$　　□

2 偏微分

§ 2.1 2 変数関数

定義 2.1 （**2** 変数関数） 変数 x, y の値に対応して変数 z の値が定まるとき，

$$z = f(x, y)$$

と表記し，f を **2** 変数関数という．このとき x, y を独立変数（**independent variable**），z を従属変数（**dependent variable**）という． □

例 2.2 （**2** 変数関数の具体例） 関数 $f(x, y)$ が

$$f(x, y) = x^2 + 5xy + 2y^2$$

と与えられるとき，$f(2, -3)$ と表記するときは

$$f(2, -3) = (2)^2 + 5(2)(-3) + 2(-3)^2 = -8$$

を意味する． □

問 2.3 （**2** 変数関数） 関数 $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3y^2$ に対して，値 $f(0, 1)$, $f(1, 1)$, $f(2, 0)$, $f(1, -1)$ を求めよ． □

定義 2.4 （定義域） 関数 $z = f(x, y)$ の独立変数の組 (x, y) がとりうる領域を定義域（**domain**）という．定義域 D は xy 平面上の集合である．境界を含む場合を閉領域（**closed domain**）と呼び，境界を含まない場合を開領域（**open domain**）と呼ぶ． □

例 2.5 （定義域の具体例） 境界を含む長方形領域

$$D = \{\, (x, y) \mid a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d \,\}$$

は閉領域である．境界を含まない長方形領域

$$D = \{\, (x, y) \mid a < x < b,\, c < y < d \,\}$$

は開領域である． □

例 2.6 （定義域の具体例） 原点を中心とする半径 a の円の境界とその内部の領域

$$D = \{\, (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \,\}$$

は閉領域である．原点を中心とする半径 a の円の内部の領域

$$D = \{\, (x, y) \mid x^2 + y^2 < a^2 \,\}$$

は開領域である． □

例 2.7 （実平面） 実 2 次元平面

$$\mathbb{R}^2 = \{\, (x, y) \mid -\infty < x < \infty,\, -\infty < y < \infty \,\}$$

は開領域である． □

注意 2.8 （2 変数関数のグラフ） 定義域 D は $\mathbb{R}^2$ 平面内の集合である．一方，$z = f(x, y)$ をみたす点 (x, y, z) の集合は 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面を表す．この曲面を関数 $z = f(x, y)$ のグラフという． □

§ 2.2 極限

定義 2.9 （極限） 関数 $f(x,y)$ において，定義域内の点 $P(x,y)$ を点 $A(a,b)$ に近づけるとする．ただし $(x,y) \neq (a,b)$ とする．このとき，近づけ方に依らず $f(x,y)$ が同じ 1 つの値 c に近づくならば，$f(x,y)$ は極限（**limit**）c が存在する，または，$f(x,y)$ は c に収束する（**convergent**）といい，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c, \qquad \lim_{x\to a, y\to b} f(x,y) = c,$$

$$\lim_{P\to A} f(x,y) = c, \qquad f(x,y) \to c \quad (x \to a, y \to b)$$

と表記する． □

注意 2.10 （極限） $A \in D$ とは限らない． □

注意 2.11 （極限） 近づけ方によって，$f(x,y)$ の値が異なるときは，極限が存在しない． □

例 2.12 （極限） 関数

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}, \qquad D = \{\, (x,y) \mid (x,y) \neq (0,0) \,\}$$

の原点 $(0,0)$ への極限を考える．$(0,0) \notin D$ であることに注意する．

(a) x 軸（$y=0$ の直線）に沿って近づける場合．$y=0$ を代入した後に $x \to 0$ の極限を考える．このとき，

$$\lim_{y=0, x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+0} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

が成り立つ．

(b) y 軸（$x=0$ の直線）に沿って近づける場合．$x=0$ を代入した後に $y \to 0$ の極限を考える．このとき，

$$\lim_{x=0, y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

が成り立つ．

(c) 直線 $y=mx$ に沿って近づける場合．ただし，m は任意の実数とする．$y=mx$ を代入した後に $x \to 0$ の極限を考える．このとき，

$$\lim_{y=mx, x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+m^2} = \frac{1}{1+m^2}$$

が成り立つ．

(a), (b), (c) より，近づけ方が異なれば $f(x,y)$ が近づく値も変わるので，極限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ は存在しない． □

例 2.13 (極限)　関数

$$f(x,y)=\frac{\sin(x+y)}{x+y},\qquad D=\{\,(x,y)\mid (x,y)\neq(0,0)\,\}$$

の原点 $(0,0)$ への極限を考える．$(0,0)\notin D$ であることに注意する．(a) y 軸 ($x=0$ の直線) に沿って近づける場合．$x=0$ を代入した後に $y\to 0$ の極限を考える．このとき，

$$\lim_{x=0,y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

が成り立つ．(b) 直線 $y=mx$ に沿って近づける場合．ただし，m は任意の実数とする．$y=mx$ を代入した後に $x\to 0$ の極限を考える．このとき，

$$\lim_{y=mx,x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+mx)}{x+mx}=\lim_{\xi\to 0}\frac{\sin\xi}{\xi}=1$$

が成り立つ．ここで，$\xi=(1+m)x$ とおいた．(a), (b), より，全方向から近づけたとき同じ値 1 に収束するので，極限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x+y)}{x+y}=1$$

が存在する．

□

例 2.14 (極限)　関数

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},\qquad D=\{\,(x,y)\mid (x,y)\neq(0,0)\,\}$$

の原点 $(0,0)$ への極限を考える．全方向から近づけるために，

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

とおき，$r\to 0$ の極限を考える．ただし，θ は $0\le\theta<2\pi$ の任意の実数とする．このとき，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^3\theta+r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=\lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)=0$$

となり，極限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$$

が存在する．

□

§ 2.3 連続性

定義 2.15 （連続） 関数 $z = f(x, y)$ は次の条件 (i), (ii), (iii) をみたすとき点 (a, b) で連続（**continuous**）であるという．

(i) $f(a, b)$ が定義されている．

(ii) 極限 $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ が存在する．

(iii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$ が成り立つ．

□

例 2.16 （連続の具体例） 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

は原点 $(0, 0)$ で連続であるか調べる．(i) $f(0, 0) = 0$ と定義されている．(ii) 前述の例題により，極限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$$

が存在する．(iii) (i), (ii) より

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = f(0,0)$$

が成り立つ．以上，(i), (ii), (iii) より関数 $f(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ で連続である． □

例 2.17 （不連続の具体例） 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

は原点 $(0, 0)$ で連続であるか調べる．まず，極限が存在するか調べる．直線 $y = mx$ に沿って近づけると，

$$\lim_{y=mx,x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

となる．直線の傾き m が異なれば，収束する値 $\dfrac{m}{1+m^2}$ も異なる．よって $(x, y) \to (0, 0)$ における極限は存在しない．極限が存在しないので，原点 $(0, 0)$ で $f(x, y)$ は連続ではない． □

例 2.18 （不連続の具体例） 関数

$$f(x,y)=\frac{\sin(x+y)}{x+y} \qquad D=\{\,(x,y)\mid (x,y)\neq(0,0)\,\}$$

は原点 $(0,0)$ で連続であるか考える．まず，前述の例題により，極限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x+y)}{x+y}=1$$

が存在する．しかし，原点で値 $f(0,0)$ が定義されていない．よって関数 $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で不連続である． □

注意 2.19 （除きうる不連続点） 関数

$$f(x,y)=\frac{\sin(x+y)}{x+y}$$

は原点で不連続である．しかし，不連続点 $(0,0)$ において

$$f(0,0)=1$$

と定義する．すると，関数 $f(x,y)$ は

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)=1$$

をみたし，原点 $(0,0)$ で連続となる．このように定義を加えることで連続となる不連続点のことを除きうる不連続点（**removable discontinuity**）という． □

問 2.20 （連続） 次の関数 $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で連続であるか述べよ．除きうる不連続点の場合は，$f(x,y)$ が連続となるよう $f(0,0)$ を定義せよ．

(1) x^2+y (2) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (3) $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ (4) $\dfrac{e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$ (5) $\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ □

§ 2.4 多変数関数の微分

1 変数関数 $y = f(x)$ において，$x = a$ から $x = a + \Delta x$ への y の増分は

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

である．このとき，xy 平面内の 2 点 $(a, f(a)), (a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ を通る直線の傾きは $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ となる．$x = a$ における $y = f(x)$ の微係数は，2 点を近づけたときの傾き $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限

$$\frac{df(a)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

である．このとき $\Delta x \to 0$ は，右から近づける $\Delta x \to +0$ と左から近づける $\Delta x \to -0$ の両方を含むことに注意する．

一方，2 変数関数 $z = f(x, y)$ においては，定義域 D 内の点 $A(a, b)$ から点 $P(a + \Delta x, b + \Delta y)$ への z の増分

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

を考える．このとき xyz 空間内の 2 点 $A'(a, b, c), P'(a + \Delta x, b + \Delta y, z + \Delta z)$（$c = f(a, b)$ とおく）を通る直線の傾きは

$$\frac{\Delta z}{\rho} = \frac{f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

となる．ただし，ρ は点 A, P 間の距離 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ である．点 P を点 A に近づけたときの傾き $\dfrac{\Delta z}{\rho}$ の極限を考える．点 P を点 A へ近づけるとき，近づける方向は x 軸や y 軸に沿った方向だけでなく，全方向から近づけなければならない．

(i) 全方向 $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ から近づけたとき，傾き $\dfrac{\Delta z}{\rho}$ の極限が存在すれば，z は全微分可能であるという．

(ii) x 軸に沿って $\Delta y = 0, \Delta x \to 0$（$\rho = |\Delta x| \to 0$）と近づけたとき，傾きの極限

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z}{\rho} = \lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{\Delta z}{|\Delta x|} = \lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{|\Delta x|} = \pm \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}$$

が存在すれば，z は $\boldsymbol{x}$ に関して偏微分可能であるという．

(iii) y 軸に沿って $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$（$\rho = |\Delta y| \to 0$）と近づけたとき，傾きの極限

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z}{\rho} = \lim_{|\Delta y| \to 0} \frac{\Delta z}{|\Delta y|} = \lim_{|\Delta y| \to 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{|\Delta y|} = \pm \lim_{\Delta y \to \pm 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y}$$

が存在すれば，z は $\boldsymbol{y}$ に関して偏微分可能であるという．

§ 2.5 偏微分

定義 2.21 （偏微分，偏微分係数） 関数 $f(x,y)$ の点 (a,b) において，極限

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x, b) - f(a,b)}{\Delta x}, \qquad \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a, b+\Delta y) - f(a,b)}{\Delta y}$$

が存在するとき，関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) において，x または y に関して偏微分可能（**partial differentiable**）であるという．この極限を偏微分係数（**partial differential coefficient**）という．

□

定義 2.22 （偏動関数） 定義 D 内の任意の点 (x,y) に対して極限

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

が存在するとき，これらを偏導関数（**partial derivative**）という．偏導関数を求める操作を偏微分するという．

□

注意 2.23 （偏微分の記号） 関数 $z = f(x,y)$ の偏導関数は

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad f_x(x,y), \quad f_x, \quad z_x,$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad f_y(x,y), \quad f_y, \quad z_y$$

と表記する．

□

注意 2.24 （偏微分） 関数 $z = f(x,y)$ のグラフは xyz 空間内の曲面となる．このグラフと平面 $y = b$ との共有点のグラフは $z = f(x,b)$ で与えられる曲線となる．このとき関数 $f(x,b)$ は x についての 1 変数関数であるから，x について微分すれば曲線 $z = f(x,b)$ の傾き $f_x(x,b)$ が得られる．

同様にしてグラフ $z = f(x,y)$ と平面 $x = a$ との共有点の曲線 $z = f(a,y)$ は，y についての 1 変数関数であるから，y について微分すれば曲線 $z = f(a,y)$ の傾き $f_y(a,y)$ が得られる． □

注意 2.25 （偏微分） x に関する偏微分の定義式において，y は定数と考えて x 方向の極限のみを考えている．同様にして，y に関する偏微分の定義式は，x は定数と考えて y 方向の極限のみを考えている．このとき定義式は x と y についての 1 変数関数の微分とそれぞれ等価となる．よって，ひとつの独立変数を除いて他のすべての独立変数を定数と考えて 1 変数関数の微分をすればよい．

□

例 2.26 （偏微分） 関数

$$f(x,y) = 2x^3 + 5xy + 2y^2$$

を x で偏微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 + 5xy + 2y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(5xy) + \frac{\partial}{\partial x}(2y^2) = 2\frac{\partial}{\partial x}x^3 + 5y\frac{\partial}{\partial x}x + 2y^2\frac{\partial}{\partial x}1 \\ &= 2 \times 3x^2 + 5y \times 1 + 2y^2 \times 0 = 6x^2 + 5y\end{aligned}$$

となり，x に関する偏導関数が得られる．y で偏微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 + 5xy + 2y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(5xy) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^2) = 2x^3\frac{\partial}{\partial y}1 + 5x\frac{\partial}{\partial y}y + 2\frac{\partial}{\partial y}y^2 \\ &= 2x^3 \times 0 + 5x \times 1 + 2 \times 2y = 5x + 4y\end{aligned}$$

となり，y に関する偏導関数が得られる． □

例 2.27 （偏微分係数） 関数 $f(x,y) = 2x^3 + 5xy + 2y^2$ の点 $(1,-2)$ における偏微分係数は

$$\begin{aligned}f_x(1,-2) &= 6x^2 + 5y \Big|_{x=1,y=-2} = 6 \times 1^2 + 5 \times (-2) = -4, \\ f_y(1,-2) &= 5x + 4y \Big|_{x=1,y=-2} = 6 \times 1 + 4 \times (-2) = -3\end{aligned}$$

となる． □

例 2.28 （偏微分） 関数 $f(x,y) = e^{x-y}\sin(2x^2 - 3xy + 4y)$ の偏導関数は，

$$\begin{aligned}f_x &= (e^{x-y}\sin(2x^2 - 3xy + 4y))_x \\ &= (e^{x-y})_x \sin(2x^2 - 3xy + 4y) + e^{x-y}(\sin(2x^2 - 3xy + 4y))_x \\ &= e^{x-y}(x-y)_x \sin(2x^2 - 3xy + 4y) + e^{x-y}(2x^2 - 3xy + 4y)_x \cos(2x^2 - 3xy + 4y) \\ &= e^{x-y}\sin(2x^2 - 3xy + 4y) + e^{x-y}(4x - 3y)\cos(2x^2 - 3xy + 4y) \\ &= e^{x-y}\left(\sin(2x^2 - 3xy + 4y) + (4x - 3y)\cos(2x^2 - 3xy + 4y)\right), \\ f_y &= (e^{x-y}\sin(2x^2 - 3xy + 4y))_y \\ &= (e^{x-y})_y \sin(2x^2 - 3xy + 4y) + e^{x-y}(\sin(2x^2 - 3xy + 4y))_y \\ &= e^{x-y}(x-y)_y \sin(2x^2 - 3xy + 4y) + e^{x-y}(2x^2 - 3xy + 4y)_y \cos(2x^2 - 3xy + 4y) \\ &= -e^{x-y}\sin(2x^2 - 3xy + 4y) + e^{x-y}(-3x + 4)\cos(2x^2 - 3xy + 4y) \\ &= -e^{x-y}\left(\sin(2x^2 - 3xy + 4y) + (3x - 4)\cos(2x^2 - 3xy + 4y)\right)\end{aligned}$$

となる． □

問 2.29 （偏微分） 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数と点 $(1,-1)$ における偏微係数を求めよ．

(1) $f(x,y)=x^4-3x^2y^2+3y^4$ (2) $f(x,y)=x^5+3x^4y^2+4xy^3+y^4$

(3) $f(x,y)=e^{xy^2}qquad(4)\quad f(x,y)=\sin(2x+3y)$

□

§ 2.6 n 変数関数の偏微分

定義 2.30 （多変換数の導関数） n 変数関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(\boldsymbol{x})$ の偏導関数は

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\cdots,x_j+h,\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_j)-f(\boldsymbol{x})}{h}\end{aligned}$$

と定義する．ただし，

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{e}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

とおく．

□

例 2.31 （多変換数の導関数） 関数 $w=f(x,y,z)=\sin(2x-y)\cos(y+3z)$ の偏導関数は，

$$\begin{aligned}w_x&=\frac{\partial f}{\partial x}=2\cos(2x-y)\cos(y+3x),\\w_y&=\frac{\partial f}{\partial y}=-\cos(2x-y)\cos(y+3x)-\sin(2x-y)\sin(y+3z)=-\cos(2x-2y-3z),\\w_z&=\frac{\partial f}{\partial z}=-3\sin(2x-y)\sin(y+3x)\end{aligned}$$

となる．

□

例 2.32 （多変換数の導関数） 関数 $r=r(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ の偏導関数は，

$$\begin{aligned}r_x&=(\sqrt{x^2+y^2+z^2})_x=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2+z^2)_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},\\r_y&=(\sqrt{x^2+y^2+z^2})_y=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2+z^2)_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{r},\\r_z&=(\sqrt{x^2+y^2+z^2})_z=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2+z^2)_z=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{r}\end{aligned}$$

となる．

□

§ 2.7 高階偏微分

関数 $z = f(x, y)$ の 1 階偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ は x, y に関する 2 変数関数であるから，さらに x または y に関して偏微分することができる．このとき

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \quad &\overset{\frac{\partial}{\partial x}}{\longrightarrow} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f_x)_x = f_{xx}, \\
\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \quad &\overset{\frac{\partial}{\partial y}}{\longrightarrow} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f_x)_y = f_{xy}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} = f_y \quad &\overset{\frac{\partial}{\partial x}}{\longrightarrow} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f_y)_x = f_{yx}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} = f_y \quad &\overset{\frac{\partial}{\partial y}}{\longrightarrow} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (f_y)_y = f_{yy}
\end{aligned}$$

と表記する．これを **2** 階偏導関数という．さらに偏微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \quad &\overset{\frac{\partial}{\partial x}}{\longrightarrow} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = (f_{xx})_x = f_{xxx}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \quad &\overset{\frac{\partial}{\partial y}}{\longrightarrow} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = (f_{xx})_y = f_{xxy}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \quad &\overset{\frac{\partial}{\partial x}}{\longrightarrow} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = (f_{xy})_x = f_{xyx}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \quad &\overset{\frac{\partial}{\partial y}}{\longrightarrow} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = (f_{xy})_y = f_{xyy}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} \quad &\overset{\frac{\partial}{\partial x}}{\longrightarrow} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = (f_{yx})_x = f_{yxx}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} \quad &\overset{\frac{\partial}{\partial y}}{\longrightarrow} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = (f_{yx})_y = f_{yxy}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} \quad &\overset{\frac{\partial}{\partial x}}{\longrightarrow} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = (f_{yy})_x = f_{yyx}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} \quad &\overset{\frac{\partial}{\partial y}}{\longrightarrow} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = (f_{yy})_y = f_{yyy}
\end{aligned}$$

と表記し **3** 階偏導関数という．さらに偏微分を繰り返して x, y についてあわせて n 回偏微分してできた導関数を

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k \cdots \partial y^j \partial x^i} = f_{\underbrace{x\cdots x}_{k}\underbrace{y\cdots y}_{j}\underbrace{x\cdots x}_{i}} \qquad i + j + \cdots + k = n$$

と表記し，n 階偏導関数という．

例 2.33 （高階導関数） 関数 $f(x,y)=2x^3+5xy+2y^2$ の高階偏導関数は，

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2+5y, \qquad f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=5x+4y,$$
$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(6x^2+5y)=(6x^2+5y)_x=12x, \quad f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(6x^2+5y)=(6x^2+5y)_y=5,$$
$$f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(5x+4y)=(5x+4y)_x=5, \qquad f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(5x+4y)=(5x+4y)_y=4,$$
$$f_{xxx}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}(12x)=(12x)_x=12, \qquad f_{xxy}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}(12x)=(12x)_y=0,$$
$$f_{xyx}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(5)=(5)_x=0, \qquad f_{xyy}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(5)=(5)_x=0,$$
$$f_{yxx}=\frac{\partial^3 3}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(5)=(5)_x=0, \qquad f_{yxy}=\frac{\partial^3 3}{\partial y\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(5)=(5)_y=0,$$
$$f_{yyx}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}(4)=(4)_x=0, \qquad f_{yyy}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}(4)=(4)_y=0$$

となり，さらに 4 階以上の偏導関数はすべて 0 となる．ここで，この関数の場合は

$$f_{xy}=f_{yx}, \qquad f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}, \qquad f_{yyx}=f_{yxy}=f_{xyy}$$

となることに注意する． □

注意 2.34 （偏微分の可換性） 一般には偏微分は交換可能ではない：

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}, \qquad f_{xy}\neq f_{yx}$$

□

定理 2.35 （偏微分の可換性） 関数 $f(x,y)$ において，f_{xy}, f_{yx} が存在し，かつこれらが連続関数であるとき，$f_{xy}=f_{yx}$ が成り立つ（注意）逆は成り立たない． □

注意 2.36 （偏微分の可換性） 偏微分が可換となる十分条件は他にも色々あるが，実用上は上の定理が一番有用である．ほとんどの普通の関数はこの定理の十分条件をみたし，偏微分が x, y について可換となる． □

問 2.37 （偏導関数） 次の関数の高階偏導関数を計算し，$f_{xy}=f_{yx}$, $f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}$, $f_{yyx}=f_{yxy}=f_{xyy}$ となることを確認せよ．

(1) $f(x,y)=x^3-x^2y+xy^2-y^3+1$ (2) $f(x,y)=x^4-3x^2y^2+3y^4$
(3) $f(x,y)=x^5+3x^4y^2+4xy^3+y^4$ (4) $f(x,y)=e^{xy^2}$ (5) $f(x,y)=\sin(2x+3y)$
(6) $f(x,y)=x^2\cos y-y^2\cos x$ (7) $f(x,y)=\tan^{-1}x^2y$ □

§ 2.8 ランダウの記号

定義 2.38 （ランダウの記号） 関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$$

が成り立つとき，

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a)$$

と表記する．$o(\cdot)$ はランダウ（**Landau**）の記号であり，ラージオーと読む．またこのとき，f は g に比べ無視できるという．

□

定義 2.39 （ランダウの記号） 関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = b < \infty$$

が成り立つとき，

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to a)$$

と表記する．$O(\cdot)$ はランダウ（**Landau**）の記号であり，スモールオーと読む．またこのとき f は g で押さえられるという．

□

注意 2.40 （二つのランダウの記号の関係） 関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to a)$$

が成り立つとき，$b \neq 0$ であれば $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - b \right) = 0$ となるので

$$f(x) = b\, g(x) + o(g(x)) \quad (x \to a)$$

が成り立つ．

□

定義 2.41 （無限大，無限小） 関数 $f(x), g(x)$ が $x \to a$ において無限小または無限大となるとき，次の呼び方を定義する．

- $f \to 0, g \to 0, f = o(g)\ (x \to a)$ のとき，f は g より高次の無限小と呼ぶ．または g は f より低次の無限小と呼ぶ．
- $f \to \pm\infty, g \to \pm\infty, f = o(g)\ (x \to a)$ のとき，f は g より低次の無限大と呼ぶ．または g は f より高次の無限大と呼ぶ．
- $f \to 0, g \to 0, f = O(g)\ (x \to a)$ のとき，f と g とは同次の無限小と呼ぶ．
- $f \to \pm\infty, g \to \pm\infty, f = O(g)\ (x \to a)$ のとき，f と g とは同次の無限大と呼ぶ．

□

例 2.42 （ランダウの記号の使用例） $\sin x$ の極限 $x \to 0$ において，

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

より

$$\sin x = O(x) \quad (x \to 0)$$

が成り立つ．よって，$x \to 0$ において $\sin x$ と x とは同次の無限小である．また，

$$\frac{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}{x^5} = \frac{R_5(x)}{x^5} = \frac{\frac{\cos(\theta x)}{5!}x^5}{x^5} = \frac{\cos(\theta x)}{5!} \to \frac{1}{5!} \quad (x \to 0)$$
$$\frac{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}{x^4} = \frac{R_5(x)}{x^4} = \frac{\frac{\cos(\theta x)}{5!}x^5}{x^4} = \frac{\cos(\theta x)}{5!}x \to 0 \quad (x \to 0)$$

より，

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) \quad (x \to 0) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \quad (x \to 0)$$

が成り立つ．よって，$x \to 0$ において $R_5(x)$ と x^5 とは同次の無限小であり，$R_5(x)$ は x^4 より高次の無限小である． □

例 2.43 （ランダウの記号の使用例） $\sqrt{x+x^2}$ の極限 $x \to \infty$ において，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{x}+1} = 1$$

より

$$\sqrt{x+x^2} = O(x) \quad (x \to \infty)$$

が成り立つ．よって，$x \to \infty$ において $\sqrt{x+x^2}$ と x とは同次の無限大である．また，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+x^2}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}} = 0$$

より

$$\sqrt{x+x^2} = o(x^2) \quad (x \to \infty)$$

が成り立つ．よって，$x \to \infty$ において $\sqrt{x+x^2}$ は x^2 より低次の無限大である． □

注意 2.44 （テイラー展開とランダウの記号） テイラー展開により

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + O\left((x-a)^{n+1}\right),$$
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

が成り立つ．なぜなら

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| = \lim_{x\to a}\left|\frac{f^{(n+1)}(x+\theta(x-a))}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\right| < \infty$$

となるからである．同様に

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n}}\right| = \lim_{x\to a}\left|\frac{f^{(n+1)}(x+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\times 0\right| = 0$$

となることより得られる．

□

例 2.45 （ランダウの記号の使用例）

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + O(x^2) \quad (x\to 0)\\ &= 1 + x + o(x) \quad (x\to 0)\\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) \quad (x\to 0)\\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x\to 0) \end{aligned}$$

□

例 2.46 （ランダウの記号の使用例）

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \quad (x\to 0)\\ &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x\to 0)\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4) \quad (x\to 0)\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad (x\to 0) \end{aligned}$$

□

§ 2.9 1 変数関数の微分

定義 2.47 （微分可能） 関数 $y = f(x)$ において，点 x から 点 $x + \Delta x$ への増分

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

に対して

$$\Delta y = \alpha\, \Delta x + o(\rho), \quad \rho = |\Delta x|, \quad (\rho \to 0)$$

をみたす α が存在するとき，関数 $y = f(x)$ は微分可能であるという．このとき

$$dy = \alpha\, dx$$

と表記し，dy を $y = f(x)$ の微分という． □

定理 2.48 （微分） 関数 $y = f(x)$ が微分可能であることの必用十分条件は，極限

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

が存在することである．このとき

$$dy = f'(x)dx$$

が成り立つ．

（証明） $\Delta y = \alpha \Delta x + \varepsilon(\rho)$ とおく．ただし，$\rho = |\Delta x|$ であり，$\varepsilon(\rho)$ は ρ についてのある関数とする．$\varepsilon(\rho)$ について式変形すると

$$\frac{\varepsilon(\rho)}{\Delta x} = \frac{\Delta y - \alpha \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} - \alpha = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \alpha$$

となる．このとき，

$$\begin{aligned} &\varepsilon(\rho) = o(\rho) \quad (\rho \to 0) \\ &\quad \Leftrightarrow \quad 0 = \lim_{\rho \to 0} \frac{\varepsilon(\rho)}{\rho} = \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon(\rho)}{\Delta x} = \pm \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \alpha \right) \\ &\quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって f が微分可能であることと極限 $f'(x)$ が存在することとは必要十分条件であり，$\alpha = f'(x)$ となる． □

例 2.49 （微分可能） 関数 $y = f(x) = x^2$ に関して

$$\Delta y = \alpha\,\Delta x + \epsilon(\rho)$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\frac{\epsilon(\rho)}{\rho} &= \lim_{\rho\to 0}\frac{(2x-\alpha)\Delta x + \Delta x^2}{\rho} = \pm\lim_{\rho\to 0}\frac{(2x-\alpha)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \pm\lim_{\rho\to 0}\left((2x-\alpha)+\Delta x\right)\\ &= \pm(2x-\alpha)\end{aligned}$$

が成り立つ．$\alpha = 2x$ のとき 0 となるから，

$$\Delta y = 2x\,\Delta x + o(\rho) \quad (\rho \to 0)$$

が成り立つ．$y = x^2$ は微分可能であり，y の微分は

$$dy = 2x\,dx$$

である． □

§ 2.10 全微分

定義 2.50 （全微分可能） 関数 $z = f(x, y)$ において，点 (x, y) から点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ への増分

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

に対して

$$\Delta z = \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (\rho \to 0)$$

をみたす α, β が存在するとき，関数 $z = f(x, y)$ は全微分可能（**total differentiable**）であるという．このとき，

$$dz = \alpha\,dx + \beta\,dy$$

と表記し，dz を $z = f(x, y)$ の全微分または単に微分という． □

例 2.51 （微分可能） 関数 $z = f(x, y) = xy$ は全微分可能であるか考える．まず，増分は

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

である．この増分が

$$\Delta z = \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y + \epsilon(\rho), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

の形をみたすと仮定する．このとき式変形すると

$$\frac{\epsilon(\rho)}{\rho} = \frac{(y - \alpha)\Delta x + (x - \beta)\Delta y + \Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

となる．ここで $\Delta x = \rho\cos\theta$, $\Delta y = \rho\sin\theta$ とおき，$\rho \to 0$ の極限をとると，

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0}\frac{\epsilon(\rho)}{\rho} &= \lim_{\rho\to 0}\frac{(y - \alpha)\rho\cos\theta + (x - \beta)\rho\sin\theta + \rho^2\sin\theta\cos\theta}{\rho} \\ &= \lim_{\rho\to 0}(y - \alpha)\cos\theta + (x - \beta)\sin\theta + \rho\sin\theta\cos\theta \\ &= (y - \alpha)\cos\theta + (x - \beta)\sin\theta\end{aligned}$$

を得る．$\lim_{\rho\to 0}\dfrac{\epsilon}{\rho} = 0$ となるためには

$$\alpha = y, \qquad \beta = x$$

とおく．よって，

$$\Delta z = y\,\Delta x + x\,\Delta y + o(\rho) \quad (\rho \to 0)$$

が成り立つ．関数 $z = xy$ は全微分可能である．また，$z = xy$ の全微分は

$$dz = y\,dx + x\,dy$$

となる． □

§ 2.11 n 変数関数の全微分

定義 2.52 （全微分） n 変数関数 $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，

$$\Delta z = \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{{\Delta x_1}^2 + {\Delta x_2}^2 + \cdots + {\Delta x_n}^2} \qquad (\rho \to 0)$$

をみたす $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ が存在するとき，f は全微分可能であるといい，

$$dz = \alpha_1 \, dx_1 + \alpha_2 \, dx_2 + \cdots + \alpha_n \, dx_n$$

と表記する．dz を z の全微分または微分という．

□

§ 2.12 全微分と偏微分

定理 2.53 （全微分可能の必要条件） 関数 $z = f(x, y)$ が全微分可能であれば，f は偏微分可能であり，

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

が成り立つ．

（証明） 関数 $z = f(x, y)$ が全微分可能であれば，

$$\Delta z = \alpha \Delta x + \beta \Delta y + o(\rho) \quad (\rho \to 0), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

が成り立つ．x 軸に沿って極限をとる．$\Delta y = 0, \Delta x \to 0$ とする．このとき，$\rho = |\Delta x|$ であるから，

$$\Delta z = \alpha \Delta x + o(|\Delta x|) \quad (|\Delta x| \to 0)$$

が成り立つ．これは

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} - \alpha = \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \quad (\Delta x \to 0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta z}{\Delta x} - \alpha \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

と等価である．また，y 軸に沿って極限をとる．$\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ とすると，同様にして $\beta = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ を得る．

□

定理 2.54 （全微分可能の十分条件） 関数 $z = f(x, y)$ において，偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ が存在し，かつこれらが連続関数であれば，$z = f(x, y)$ は全微分可能である（注意）逆は成り立たない．

□

注意 2.55 （全微分可能の十分条件） 全微分可能となる十分条件は他にもあるが，上の定理が一番実用的である． □

例 2.56 （全微分） 関数 $z = f(x,y) = x^2 e^{xy}$ は偏導関数

$$f_x(x,y) = (x^2 e^{xy})_x = 2xe^{xy} + x^2 y e^{xy} = (2x + x^2 y)e^{xy},$$
$$f_y(x,y) = (x^2 e^{xy})_y = x^3 y e^{xy}$$

が存在し，これらは連続関数である．よって $f(x,y)$ は全微分可能である．また，z の全微分は

$$dz = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy = (2x + x^2 y)e^{xy}\,dx + x^3 e^{xy}\,dy = e^{xy}\left((2x + x^2 y)\,dx + x^3\,dy\right)$$

となる（注意）微分 dx, dy と関数 $e^{xy}, 2x + x^2 y, x^3$ の書く順を入れ替えてはならない．つまり，$dz = ((2x + x^2 y)dx + x^3 dy)e^{xy}$ や $dz = e^{xy}(dx\,(2x + x^2 y) + dy\,x^3)$ は誤った表記である． □

例 2.57 （全微分） 関数 $z = x^4 y + x^2 y^3 + xy^4$ は偏導関数

$$z_x = 4x^3 y + 2xy^3 + y^4, \qquad z_y = x^4 + 3x^2 y^2 + 4xy^3$$

が存在し，かつこれらは連続関数である．よって z は全微分可能であり，z の全微分は

$$dz = z_x\,dx + z_y\,dy = (4x^3 y + 2xy^3 + y^4)\,dx + (x^4 + 3x^2 y^2 + 4xy^3)\,dy$$

となる． □

例 2.58 （全微分） 関数 $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ は偏導関数

$$\theta_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad \theta_y = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

が存在し，かつこれらは原点を除き連続関数である．よって z は原点を除き全微分可能であり，z の全微分は

$$d\theta = \theta_x\,dx + \theta_y\,dy = \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

となる（注意）微分 dx, dy と関数 $-y, x$ の書く順を入れ替えてはならない．また，分母 $x^2 + y^2$ の部分は微分 dx, dy の前から $(x^2 + y^2)^{-1}$ が掛けられているという意味であることに注意する．つまり，以下の表記はすべて誤った表記である：

$$d\theta = \frac{-dx\,y + dy\,x}{x^2 + y^2} = (-y\,dx + x\,dy)\frac{1}{x^2 + y^2} = (-dx\,y + dy\,dx)\frac{1}{x^2 + y^2}.$$

□

例 2.59 （全微分） 関数 $u = xy + yz + zx$ は偏導関数

$$u_x = u + z, \quad u_y = x + z, \quad u_z = y + x$$

が存在し，かつこれらは連続関数である．よって u は全微分可能であり，u の全微分は

$$du = u_x\,dx + u_y\,dy + u_z\,dz = (u + z)\,dx + (x + z)\,dy + (x + y)\,dz$$

となる．

□

問 2.60 （全微分） 次の関数の全微分を求めよ．

$$(1) \quad z = x\cos y - y\cos x \qquad (2) \quad w = xy + yz + zx$$

□

§ 2.13 全微分と連続

定理 2.61 （全微分可能と連続） 関数 $z = f(x, y)$ が全微分可能であれば，$z = f(x, y)$ は連続関数である．

（証明） 関数 $z = f(x, y)$ が全微分可能であれば，

$$\Delta z = \alpha\Delta x + \beta\Delta y + o(\rho) \quad (\rho \to 0), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

が成り立つ．このとき $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ の極限をとる．右辺は

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} (\alpha\Delta x + \beta\Delta y + o(\rho)) = 0$$

となる．よって左辺も 0 となるので，

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \Delta z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad f(x, y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} f(x + \Delta x, y + \Delta y) \quad \Leftrightarrow \quad f(x, y) = \lim_{(\tilde{x}, \tilde{y})\to(x,y)} f(\tilde{x}, \tilde{y})$$

を得る．点 (x, y) への極限 $\lim_{(\tilde{x}, \tilde{y})\to(x,y)} f(\tilde{x}, \tilde{y})$ が存在し，かつ点 (x, y) における値 $f(x, y)$ と等しいので，関数 $f(x, y)$ は任意の点 (x, y) について連続である．

□

§ 2.14 1 変数関数の合成関数の微分

定理 2.62 （合成関数の微分） 関数 $y = f(x), x = \phi(t)$ の合成関数 $y = f(\phi(t))$ は t についての 1 変数関数であり，この合成関数の導関数は

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

となる．または，代入も含めて正確に書くと

$$\frac{d}{dt}f(\phi(t)) = f'(\phi(t))\phi'(t)$$

となる．

（証明） 関数 $y = f(x), x = \phi(t)$ を微分可能とすると

$$dy = f'(x)dx, \qquad dx = \phi'(t)dt$$

であり，

$$\begin{aligned}
&(\text{☆}) \qquad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x),\\
&(\circ\ ) \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon_1(\Delta x)}{\Delta x} = 0,\\
&(\bigstar) \qquad \Delta x = \phi(t+\Delta t) - \phi(t) = \phi'(t)\Delta t + \varepsilon_2(\Delta t),\\
&(\bullet\ ) \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon_2(\Delta t)}{\Delta t} = 0
\end{aligned}$$

と表される．このとき，

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{f(\phi(t+\Delta t)) - f(\phi(t))}{\Delta t} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t}\\
&= \frac{f'(x)\Delta x + \varepsilon_1}{\Delta x}\frac{\phi'(t)\Delta t + \varepsilon_2}{\Delta t} = \left(f'(x) + \frac{\varepsilon_1}{\Delta x}\right)\left(\phi'(t) + \frac{\varepsilon_2}{\Delta t}\right)\\
&= f'(x)\phi'(t) + \phi'(t)\frac{\varepsilon_1}{\Delta x} + f'(x)\frac{\varepsilon_2}{\Delta t} + \frac{\varepsilon_1}{\Delta x}\frac{\varepsilon_2}{\Delta t}
\end{aligned}$$

となる．ここで $\Delta t \to 0$ の極限をとると (•) が成り立つ．このとき，$\Delta t \to 0, \varepsilon_2 \to 0$ より，(★) は $\Delta x \to 0$ となる．$\Delta x \to 0$ のとき (○) が成り立つ．よって，(○), (•) より，

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x)\phi'(t) = f'(\phi(t))\phi'(t)$$

を得る． □

§ 2.15 2 変数関数 と 1 変数関数の合成関数の微分

定理 2.63 （合成関数の微分） 2 変数関数 $z = f(x, y)$ と 1 変数関数 $x = \phi(t), y = \psi(t)$ との合成関数 $z = f(\phi(t), \psi(t))$ の導関数は

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

となる．また，代入も含めて正確に書くと

$$\frac{d}{dt}f(\phi(t), \psi(t)) = f_x(\phi(t), \psi(t))\phi'(t) + f_y(\phi(t), \psi(t))\psi'(t)$$

となる．

（証明） 関数 $z = f(x, y)$ は全微分可能であり，関数 $x = \phi(t), y = \psi(t)$ は微分可能とする．このとき

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy, \quad dx = \phi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt$$

が成り立つ．または，

$$\begin{aligned}
&\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1(\rho) = o(\rho) \quad (\rho \to 0),\\
&\Delta x = \phi(t + \Delta t) - \phi(t) = \phi'(t)\Delta t + \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2(\Delta t) = o(\Delta t) \quad (\Delta t \to 0),\\
&\Delta y = \psi(t + \Delta t) - \psi(t) = \psi'(t)\Delta t + \varepsilon_3, \quad \varepsilon_3(\Delta t) = o(\Delta t) \quad (\Delta t \to 0)
\end{aligned}$$

と表される．ただし，$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta z}{\Delta t} &= \frac{f(\phi(t + \Delta t), \psi(t + \Delta t)) - f(\phi(t), \psi(t))}{\Delta t} = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta t}\\
&= \frac{f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1}{\Delta t} = f_x(x, y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\varepsilon_1}{\Delta t}\\
&= f_x(x, y)\frac{\phi'(t)\Delta t + \varepsilon_2}{\Delta t} + f_y(x, y)\frac{\psi'(t)\Delta t + \varepsilon_3}{\Delta t} + \frac{\varepsilon_1}{\Delta t}\\
&= f_x(x, y)\phi'(t) + f_y(x, y)\psi'(t) + \frac{\varepsilon_1}{\Delta t} + f_x(x, y)\frac{\varepsilon_2}{\Delta t} + f_y(x, y)\frac{\varepsilon_3}{\Delta t}
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\Delta t \to 0$ の極限をとると，$\varepsilon_2(\Delta t) = o(\Delta t)$, $\varepsilon_3(\Delta t) = o(\Delta t)$, $\varepsilon_1(\rho) = o(\rho)$ より，$\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\varepsilon_2(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, $\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\varepsilon_3(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ であり，

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon_1}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon_1}{\rho}\frac{\rho}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon_1}{\rho}\right)\left(\lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\right)\\
&= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon_1}{\rho}\right)\left(\lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\left(\phi'(t) + \frac{\varepsilon_2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\psi'(t) + \frac{\varepsilon_3}{\Delta t}\right)^2}\right) = 0 \times \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} = 0
\end{aligned}$$

となるので，

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=f_x(x,y)\phi'(t)+f_y(x,y)\psi'(t)=f_x(\phi(t),\psi(t))\phi'(t)+f_y(\phi(t),\psi(t))\psi'(t)$$

を得る．

□

例 2.64 （合成関数の微分） 関数 $z=f(x,y)$, $x=2t-3$, $y=-t+1$ の合成関数 $z=f(2t-3,-t+1)$ の導関数は，

$$\frac{dx}{dt}=2,\qquad \frac{dy}{dt}=-1$$

より

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=2f_x(2t-3,-t+1)-f_y(2t-3,-t+1)$$

となる．

□

例 2.65 （合成関数の微分） 関数 $z=xy^2-x^2y$, $x=t^2$, $y=e^t$ の合成関数の導関数は，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2-2xy=e^{2t}-2t^2e^t,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2xy-x^2=2t^2e^t-t^4,\quad \frac{dx}{dt}=2t,\quad \frac{dy}{dt}=e^t$$

より

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=(e^{2t}-2t^2e^t)2t+(2t^2e^t-t^4)e^t=2(t^2+t)e^{2t}-(t^4+4t^3)e^t$$

となる．

□

例 2.66 （合成関数の微分） 関数 $z=x^3y^2$, $x=t^2$, $y=t^4$ の合成関数の微分は，

$$z_x=3x^2y^2=3t^4t^8=3t^{12},\quad z_y=2x^3y=2t^6t^4=2t^{10},\quad x'=2t,\quad y'=4t^3$$

より

$$\frac{dz}{dt}=z_xx'+z_yy'=(3t^{12})(2t)+(2t^{10})(4t^3)=14t^{13}$$

となる．

□

例 2.67 （合成関数の微分） 関数 $z=f(x,y)$, $y=g(x)$ の合成関数 $z=f(x,g(x))$ の x 微分を考える．まず，$x=t$, $y=g(t)$ と置き換えて，$z=f(t,g(t))$ を t で微分する．$\dfrac{dx}{dt}=1$, $\dfrac{dy}{dt}=g'(t)$ より

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d}{dt}f(t,g(t))=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=f_x(t,g(t))+f_y(t,g(t))g'(t)$$

となる．t を x に置き換えると

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dx}f(x,g(x))=f_x(x,g(x))+f_y(x,g(x))g'(x)=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

を得る．

□

問 2.68 （合成関数の微分） 次の合成関数の導関数を求めよ．

(1) $z = x\cos y - y\cos x,\ x = \cos 2t,\ y = \sin 2t$ (2) $z = y^2 + 2xy + 3x^2,\ x = \log t,\ y = t$ □

§ 2.16 2 変数関数 と 2 変数関数の合成関数の微分

定理 2.69 （合成関数の微分） 2 変数関数 $z = f(x,y)$ と 2 変数関数 $x = \phi(u,v),\ v = \psi(u,v)$ の合成関数 $z = f(\phi(u,v),\psi(u,v))$ の偏微分は

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

で与えられる．代入も含めて書くと

$$\frac{\partial}{\partial u}f(\phi(u,v),\psi(u,v)) = f_x(\phi(u,v),\psi(u,v))\phi_u(u,v) + f_y(\phi(u,v),\psi(u,v))\psi_u(u,v),$$
$$\frac{\partial}{\partial v}f(\phi(u,v),\psi(u,v)) = f_x(\phi(u,v),\psi(u,v))\phi_v(u,v) + f_y(\phi(u,v),\psi(u,v))\psi_v(u,v)$$

と表される． □

例 2.70 （合成関数の微分の具体例） 関数 $z = xy^2 + x^2y$ と関数 $x = u + v,\ y = u - v$ の合成関数の偏導関数を求める．まず，

$$z_x = y^2 + 2xy = (u-v)^2 + 2(u+v)(u-v) = 3u^2 - v^2 - 2uv,$$
$$z_y = 2xy + x^2 = 2(u+v)(u-v) + (u+v)^2 = 3u^2 - v^2 + v^2 + 2uv,$$
$$x_u = 1, \qquad y_u = 1, \qquad x_v = 1, \qquad y_v = -1$$

より，

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = (3u^2 - v^2 - 2uv) + (3u^2 - v^2 + v^2 + 2uv) = 6u^2 - 2v^2,$$
$$z_v = z_x x_v + z_y y_v = (3u^2 - v^2 - 2uv) - (3u^2 - v^2 + v^2 + 2uv) = -4uv$$

を得る． □

例 2.71 （合成関数の微分の具体例） 関数 $z = xy^2 + x^2y$ と関数 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ の合成関数の偏導関数を求める．まず，

$$z_x = y^2 + 2xy = r^2(\sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta), \qquad z_y = 2xy + x^2 = r^2(2\cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta),$$
$$x_r = \cos\theta, \qquad y_r = \sin\theta, \qquad x_\theta = -r\sin\theta, \qquad y_\theta = r\cos\theta$$

より，

$$z_r = z_x x_r + z_y y_r = 3r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)$$
$$z_\theta = z_x x_\theta + z_y y_\theta = r^3(1 + 3\sin\theta\cos\theta)(\cos\theta - \sin\theta)$$

を得る． □

§ 2.17 n 変数関数と 1 変数関数の合成関数の微分

定理 2.72 （多変数関数の合成関数の微分） n 変数関数 $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(\boldsymbol{x})$ と 1 変数関数

$$x_1 = \phi_1(t), \quad x_2 = \phi_2(t), \quad \cdots, \quad x_n = \phi_n(t)$$

の合成関数 $z = f(\boldsymbol{x}(t))$ の微分は

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}$$

で与えられる．代入も含めて書くと

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t)) = {} & f_{x_1}(\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t))\phi_1'(t) \\ & + f_{x_2}(\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t))\phi_2'(t) + \\ & \cdots + f_{x_n}(\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_n(t))\phi_n'(t)\end{aligned}$$

となる．また，ベクトル表記では

$$\frac{dz}{dt} = \nabla f \cdot \boldsymbol{x}' = \operatorname{grad} f \cdot \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$$

と表される．ここで

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'(t) = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \phi_1'(t) \\ \phi_2'(t) \\ \vdots \\ \phi_n'(t) \end{bmatrix},$$

$$\nabla f = \nabla f(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad} f = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x_1}(\boldsymbol{x}) \\ f_{x_2}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

とおいた． □

注意 2.73 （多変数関数の合成関数の微分） 曲面 $z = f(\boldsymbol{x})$ の点 $\boldsymbol{x}$ における法線ベクトルは $\nabla f(\boldsymbol{x}(t))$ である（接平面の節を参照）．$\boldsymbol{x}(t)$ の軌跡は $(x_1, \cdots, x_n)$ 空間内の曲線である．この曲線の接ベクトルは $\boldsymbol{x}'(t)$ である． □

§ 2.18 n 変数関数と m 変数関数の合成関数の微分

定理 2.74 （合成関数の微分） n 変数関数 $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(\boldsymbol{x})$ と m 変数関数

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(u_1, u_2, \cdots, u_m) = \phi_1(\boldsymbol{u}), \\ x_2 &= \phi_2(u_1, u_2, \cdots, u_m) = \phi_2(\boldsymbol{u}), \\ &\vdots \\ x_n &= \phi_n(u_1, u_2, \cdots, u_m) = \phi_n(\boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

の合成関数 $z = f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}))$ の偏微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u_1} &= \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_1} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u_1}, \\ \frac{\partial z}{\partial u_2} &= \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_2} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_2} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u_2}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial z}{\partial u_m} &= \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_m} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_m} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_m} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u_m} \end{aligned}$$

で与えられる．代入も含めて書くと u_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ に関して

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u_j} f(\phi_1(u_1, \cdots, u_m), \phi_2(u_1, \cdots, u_m), \cdots, \phi_n(u_1, \cdots, u_m)) \\ &\qquad = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(\phi_1(u_1, \cdots, u_m), \phi_2(u_1, \cdots, u_m), \cdots, \phi_n(u_1, \cdots, u_m))\phi_{u_j}(u_1, \cdots, u_m) \end{aligned}$$

と表される．また，ベクトル表記では

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} z = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial u_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_m} & \frac{\partial x_2}{\partial u_m} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial x_n} \end{bmatrix} = J \nabla_{\boldsymbol{x}} z$$

となる．行列 $J = \left[\frac{\partial x_j}{\partial u_i}\right]_{m \times n}$ をヤコビ行列（**Jacobi matrix**）という． □

§ 2.19 偏微分作用素

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$
$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right) f = \alpha\frac{\partial}{\partial x} f + \beta\frac{\partial}{\partial y} f = \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} g\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x} g\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + g\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} g\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

§ 2.20 座標変換

定義 2.75 （座標変換） 座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が変数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ を独立変数とする関数

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1, u_2, \cdots, u_n), \\ x_2 = \varphi_2(u_1, u_2, \cdots, u_n), \\ \quad \vdots \\ x_n = \varphi_n(u_1, u_2, \cdots, u_n) \end{cases}$$

により定まるとする．このとき，$(u_1, \cdots, u_n)$ をあらたに座標と呼び，(*) を座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ から座標 $(u_1, \cdots, u_n)$ への座標変換（**coordinate transform**）と呼ぶ． □

定義 2.76 （ヤコビアン） 座標変換 $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (u_1, \cdots, u_n)$ に対して，行列式

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_n)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_n} & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}$$

をこの座標変換のヤコビアン（**Jacobian**）またはヤコビの行列式（**Jacobi determinant**）という． □

注意 2.77 （座標変換） ヤコビアンが非零となるときのみ，座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ と座標 $(u_1, \cdots, u_n)$ とが 1 対 1 に対応する． □

§ 2.21 斜交座標

2 次元ユークリッド空間に普通に導入する座標 xy は，標準基底

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

における座標である．座標を (x, y) とすると任意のベクトルは

$$(☆) \qquad \boldsymbol{p} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と表される．一方，基底

$$\boldsymbol{e}_u = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_v = \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$$

における座標を (u, v) とおくと，任意のベクトルは

$$(★) \qquad \boldsymbol{p} = u\boldsymbol{e}_u + v\boldsymbol{e}_v = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_u & \boldsymbol{e}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

と表される．ベクトル $\boldsymbol{p}$ は同じものであるから，(☆), (★) より

$$(\circ) \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

が成り立つ．基底 $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ は 1 次独立であるから，A は正則で逆行列 A^{-1} が存在し，

$$(\bullet) \qquad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

が成り立つ．(○) を座標 (x, y) から座標 (u, v) への座標変換という．また，(●) を座標 (u, v) から座標 (x, y) への座標変換という．標準基底 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ は $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = 0$ をみたし直交するから，座標 xy は直交座標である．基底 $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ の方向余弦

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e}_v}{\|\boldsymbol{e}_u\|\|\boldsymbol{e}_v\|} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)}}$$

は一般には 0 とはならないので，座標 uv は斜交座標である．

問 2.78 （直交座標と斜交座標） 基底 $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ に関して次の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{e}_u$ と $\boldsymbol{e}_v$ が直交する $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の条件を求めよ．

(2) $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ が単位ベクトルとなる $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の条件を求めよ．

(3) $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ が直交しかつ単位ベクトルとなる $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の条件を求めよ． □

例 2.79 （直交座標から斜交座標へのヤコビアン） 直交座標 xy から斜交座標 uv への座標変換 (○) のヤコビアンを求める．(○) より

$$x = \alpha u + \gamma v, \qquad y = \beta u + \delta v$$

であるから，

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \beta, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \gamma, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \delta$$

となり，ヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \det(A^T) = \alpha\delta - \beta\gamma$$

を得る．

□

例 2.80 （斜交座標における偏微分作用素） 直交座標 xy から斜交座標 uv への座標変換 (○) を考える．関数 $z = f(x,y)$ における u, v に関する偏導関数を求める．導関数の微分則を用いると

$$(\triangle) \qquad z_u = \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \alpha z_x + \beta z_y, \quad z_v = \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \gamma z_x + \delta z_y$$

を得る．この関係式は

$$(\flat) \qquad \begin{bmatrix} z_u \\ z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix}$$

とも表される．また，ナブラ作用素

$$\nabla_{(u,v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{bmatrix}, \qquad \nabla_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

を導入すれば

$$\nabla_{(u,v)} z = A^T \nabla_{(x,y)} z$$

と簡潔に表される．次に (△) において関数 z は任意でもよいので関数を省略すると，偏微分演算子の関係式

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y} = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y} = \gamma\frac{\partial}{\partial x} + \delta\frac{\partial}{\partial y}$$

を得る．この関係式は偏微分作用素に関する uv 座標から xy 座標への変換を表す．点に関する座標変換 (○) の逆向きの変換であることに注意する．

□

例 2.81 (斜交座標における偏微分作用素)　斜交座標 uv から直交座標 xy への座標変換 (●) を考える．関数 $z = f(u, v)$ における x, y に関する偏導関数を求める．(●) より座標変換は

$$u = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}(\delta x - \gamma y), \qquad v = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}(-\beta x + \alpha y)$$

であるか，導関数の微分則を用いると

$$(▲) \qquad \begin{aligned} z_x &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\left(\delta z_u - \beta z_v\right), \\ z_y &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\left(-\gamma z_u + \alpha z_v\right) \end{aligned}$$

を得る．この関係式は

$$\begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_u \\ z_v \end{bmatrix} = A^{-T}\begin{bmatrix} z_u \\ z_v \end{bmatrix}$$

とも表される．この結果は (b) の両辺に A^{-T} を左から掛けることでも得られる．また，ナブラ作用素を導入すると

$$\nabla_{(x,y)} z = A^{-T}\nabla_{(u,v)} z$$

と簡潔に表される．次に (▲) において関数 z は任意で成り立つので省略すると，偏微分作用素の関係式

$$(◎) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\left(\delta\frac{\partial}{\partial u} - \beta\frac{\partial}{\partial v}\right), \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\left(-\gamma\frac{\partial}{\partial u} + \alpha\frac{\partial}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

を得る．この関係式は偏微分作用素に関する xy 座標から uv 座標への変換を表す．点に関する座標変換 (●) の逆向きの変換であることに注意する．　□

例 2.82 (斜交座標への座標変換)　関数 $z = f(x, y)$ に対して関数

$$F(x, y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = (z_x)^2 + (z_y)^2$$

を考える．この関数を斜交座標 uv で表す．(▲) を代入すると

$$\begin{aligned} F &= \left(\frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\left(\delta z_u - \beta z_v\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\left(-\gamma z_u + \alpha z_v\right)\right)^2 \\ &= \frac{(\delta^2 + \gamma^2)(z_u)^2 + (\alpha^2 + \beta^2)(z_v)^2 - 2(\beta\delta + \alpha\gamma)z_u z_v}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} \\ &= \frac{\gamma^2 + \delta^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - 2\frac{\beta\delta + \alpha\gamma}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{aligned}$$

を得る．　□

問 2.83 (斜交座標への座標変換)　この関数 F が斜交座標 uv で

$$F = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

と表されるための $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の必要十分条件は，基底 $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ が正規直交基底であることを示せ．またこのとき，行列 A は直交行列となる ($AA^T = E$ をみたす) ことを示せ．　□

例 2.84 (斜交座標におけるラプラシアン)　関数 $z = f(x, y)$ に対して関数

$$F(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{xx} + z_{yy}$$

を考える．この関数を斜交座標 uv で表す．(◎) より

$$\begin{aligned}
z_{xx} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} z = \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\left(\delta\frac{\partial}{\partial u} - \beta\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\delta\frac{\partial}{\partial u} - \beta\frac{\partial}{\partial v}\right) z \\
&= \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\left(\delta\frac{\partial}{\partial u} - \beta\frac{\partial}{\partial v}\right)(\delta z_u - \beta z_v) = \frac{\delta^2 z_{uu} - 2\beta\delta z_{uv} + \beta^2 z_{vv}}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}, \\
z_{yy} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} z = \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\left(-\gamma\frac{\partial}{\partial u} + \alpha\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\gamma\frac{\partial}{\partial u} + \alpha\frac{\partial}{\partial v}\right) z \\
&= \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\left(-\gamma\frac{\partial}{\partial u} + \alpha\frac{\partial}{\partial v}\right)(-\gamma z_u + \alpha z_v) = \frac{\gamma^2 z_{uu} - 2\alpha\gamma z_{uv} + \alpha^2 z_{vv}}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}
\end{aligned}$$

となるらか，

$$\begin{aligned}
F = z_{xx} + z_{yy} &= \frac{(\delta^2 + \gamma^2) z_{uu} - 2(\alpha\gamma + \beta\delta) z_{uv} + (\alpha^2 + \beta^2) z_{vv}}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} \\
&= \frac{\gamma^2 + \delta^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

を得る．　□

例 2.85 (斜交座標におけるラプラシアン)　直交座標 xy から斜交座標 uv への座標変換 (○) を考える．このときラプラシアン (**Laplacian**) またはラプラス作用素 (**Laplace operator**) と呼ばれる偏微分作用素

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

の uv 座標への変換を行う．前例題において関数 z は任意であるから，

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\gamma^2 + \delta^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

を得る．　□

問 2.86 （斜交座標におけるラプラシアン） 斜交座標 uv におけるラプラシアンが

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

となるための $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の必要十分条件は，基底 $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ が正規直交基底であることを示せ．またこのとき，行列 A は直交行列となる（$AA^T = E$ をみたす）ことを示せ． □

問 2.87 （斜交座標） 座標 (x, y) から斜交座標 (u, v) への座標変換

$$(1)\quad x = \sqrt{3}u - \sqrt{3}v, y = u + v \quad (2)\quad x = 2u - v, y = u + 2v \quad (3)\quad x = u - v, y = u + \sqrt{3}v$$

に対してそれぞれ，次の問に答えよ．

(i) $u = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, v = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ をみたす (x, y) の軌跡をそれぞれ書け．
(ii) u 軸（$v = 0$ の直線）と v 軸（$u = 0$ の直線）の方向ベクトルを求めよ．
(iii) u 軸と v 軸のなす角度を求めよ．
(iv) 座標 $(u, v) = (1, 1), (2, 3), (-1, 2), (-1, -3), (2, -1)$ に対して，座標 (x, y) を求めよ．
(v) 座標 $(x, y) = (1, 1), (2, 3), (-1, 2), (-1, -3), (2, -1)$ に対して，座標 (u, v) を求めよ．
(vi) 直線 $x + 2y = 1$ を座標 (u, v) で表せ．
(vii) 曲線 $x^2 + y^2 = 1$ を座標 (u, v) で表せ．
(viii) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ．
(ix) 偏微分作用素に関する座標 uv から座標 xy への座標変換を求めよ．
(x) 偏微分作用素に関する座標 xy から座標 uv への座標変換を求めよ．
(xi) 関数 $z = f(x, y)$ に対する関数 $F = (z_x)^2 + (z_y)^2$ を座標 uv で表わせ．
(xii) 関数 $z = f(x, y)$ に対する関数 $F = z_{xx} + z_{yy}$ を座標 uv で表わせ．
(xiii) ラプラス作用素 $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を座標 uv で表わせ． □

§ 2.22 2 次元空間の極座標

定義 2.88 （極座標） 2 次元空間において，直交座標 (x, y) から極座標（**polar coordinates**）(r, θ) への座標変換は

$$(☆) \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

で与えられる．

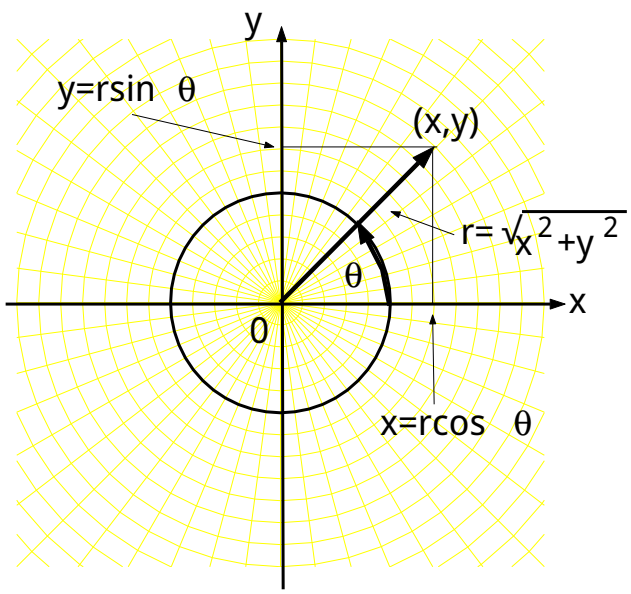
□

注意 2.89 （極座標） 極座標 (r, θ) から直交座標 (x, y) への座標変換は

$$(★) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

と表される．

□



例 2.90 （極座標のヤコビアン） 座標変換 (☆) より

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

となるらか，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

と得られる．

□

例 2.91 (極座標における偏微分作用素の変換)　座標 (x, y) から極座標 (r, θ) への変換 (☆) を考える．関数 $z = f(x, y)$ を r, θ に関して偏微分すると，合成関数の微分則より

$$(\triangle) \quad z_r = \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial z}{\partial y} = z_x\cos\theta + z_y\sin\theta,$$
$$z_\theta = \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y} = -z_x r\sin\theta + z_y r\cos\theta$$

が成り立つ．これは

$$(\flat) \qquad \begin{bmatrix} z_r \\ z_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix}$$

とも表される．行列 A の行列式がヤコビアンである．このとき，

$$\frac{\partial}{\partial r}z = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)z, \qquad \frac{\partial}{\partial \theta}z = \left(-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)z$$

と書くと関数 z は任意であり省略すると

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

となる．(★) を用いて右辺の r, θ を x, y で表すと

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial \theta} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

となる．これは偏微分作用素における極座標 $r\theta$ から座標 xy への座標変換である．点に関する座標変換 (☆) とは変換の向きが異なることに注意する．　□

例 2.92 (極座標における偏微分作用素の変換)　極座標 (r, θ) から座標 (x, y) への変換 (★) を考える．関数 $z = f(r, \theta)$ を x, y に関して偏微分すると，(★) と合成関数の微分則より

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{-y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{xz_r}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{yz_\theta}{x^2+y^2},$$
$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{yz_r}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xz_\theta}{x^2+y^2}$$

が成り立つ．さらに (☆) を用いて右辺を r, θ で表すと

$$(\blacktriangle) \quad z_x = z_r\cos\theta - \frac{z_\theta}{r}\sin\theta, \qquad z_y = z_r\sin\theta + \frac{z_\theta}{r}\cos\theta$$

となる．これは

$$\begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ \sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r \\ z_\theta \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} z_r \\ z_\theta \end{bmatrix}$$

とも表される．この式は (♭) の両辺に A^{-1} を左から掛けることでも得られる．すなわち，$B = A^{-1}$ となる．ここで，

$$\frac{\partial}{\partial x}z = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)z, \qquad \frac{\partial}{\partial y}z = \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)z$$

と書くと，関数 z は任意であり省略すると

$$(\circ) \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

を得る．これは偏微分作用素における座標 xy から極座標 $r\theta$ への座標変換である．点に関する座標変換 (★) とは変換の向きが異なることに注意する． □

例 2.93 (極座標への座標変換)　関数 $z = f(x,y)$ に対して関数

$$F(x,y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = (z_x)^2 + (z_y)^2$$

を考える．この関数を極座標 $r\theta$ で表す．(▲) を代入すると

$$\begin{aligned} F &= \left(z_r\cos\theta - \frac{z_\theta}{r}\sin\theta\right)^2 + \left(z_r\sin\theta + \frac{z_\theta}{r}\cos\theta\right)^2 \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(z_r)^2 - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}z_r z_\theta + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}z_r z_\theta + \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{r^2}(z_\theta)^2 \\ &= (z_r)^2 + \frac{(z_\theta)^2}{r^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2 \end{aligned}$$

を得る． □

例 2.94 (極座標におけるラプラシアン)　関数 $z = f(x,y)$ に対して関数

$$F(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{xx} + z_{yy}$$

を考える．この関数を極座標 $r\theta$ で表す．(○) より，

$$
\begin{aligned}
z_{xx} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} z = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) z \\
&= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\cos\theta\, z_r - \frac{1}{r}\sin\theta\, z_\theta\right) \\
&= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\, z_r - \frac{1}{r}\sin\theta\, z_\theta\right) - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\, z_r - \frac{1}{r}\sin\theta\, z_\theta\right) \\
&= \cos\theta\left(\cos\theta\, z_{rr} - \sin\theta\left(-\frac{1}{r^2}\, z_\theta + \frac{1}{r}\, z_{r\theta}\right)\right) - \frac{1}{r}\sin\theta\left(-\sin\theta\, z_r + \cos\theta\, z_{r\theta} - \frac{1}{r}\left(\cos\theta\, z_\theta + \sin\theta\, z_{\theta\theta}\right)\right) \\
&= \cos^2\theta\, z_{rr} + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\, z_{\theta\theta} - \frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\, z_{r\theta} + \frac{1}{r}\sin^2\theta\, z_r + \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\, z_\theta, \\
z_{yy} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} z = \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) z \\
&= \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\sin\theta\, z_r + \frac{1}{r}\cos\theta\, z_\theta\right) \\
&= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\, z_r + \frac{1}{r}\cos\theta\, z_\theta\right) + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\, z_r + \frac{1}{r}\cos\theta\, z_\theta\right) \\
&= \sin\theta\left(\sin\theta\, z_{rr} + \cos\theta\left(-\frac{1}{r^2} z_\theta + \frac{1}{r} z_{r\theta}\right)\right) + \frac{1}{r}\cos\theta\left(\cos\theta\, z_r + \sin\theta\, z_{r\theta} + \frac{1}{r}\left(-\sin\theta\, z_\theta + \cos\theta\, z_{\theta\theta}\right)\right) \\
&= \sin^2\theta\, z_{rr} + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta\, z_{\theta\theta} + \frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\, z_{r\theta} + \frac{1}{r}\cos^2\theta\, z_r - \frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\, z_\theta
\end{aligned}
$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
F = z_{xx} + z_{yy} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f = (\cos^2\theta + \sin^2\theta) z_{rr} + \frac{1}{r^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) z_{\theta\theta} + \frac{1}{r}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) z_r \\
&= z_{rr} + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta} + \frac{1}{r} z_r = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}
\end{aligned}
$$

を得る．

□

例 2.95 （極座標におけるラプラシアン） ラプラス演算子

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

を座標 $r\theta$ で表す．前例題より

$$F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) z = \triangle z = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) z$$

が成り立つ．関数 z は任意であるから，

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

を得る．

□

§ 2.23 3 次元空間の極座標

定義 2.96 （極座標） 3 次元空間において，直交座標 (x, y, z) から極座標（**polar coordinates**）(r, θ, φ) への座標変換は

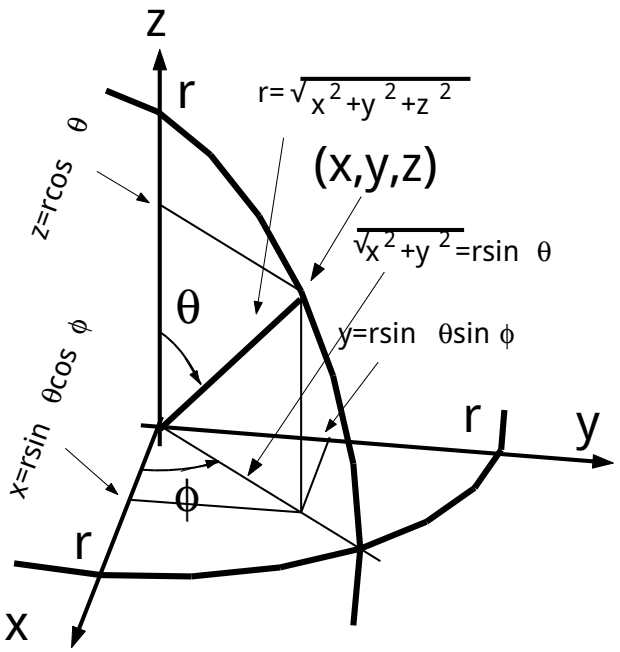
$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

で与えられる． □

注意 2.97 （極座標） 極座標 (r, θ, φ) から直交座標 (x, y, z) への座標変換は

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

と表される． □



例 2.98 （極座標のヤコビアン）

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} + r\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^2\cos^2\theta\sin\theta \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} + r^2\sin^3\theta \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\theta\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)$$

$$= r^2\sin\theta$$

□

例 2.99 （極座標における偏微分作用素の変換）

$$\begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

typing...

□

例 2.100 （極座標における偏微分作用素の変換）

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi & -\frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\cos\theta} \\ \sin\theta\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \\ \cos\theta & -\frac{1}{r}\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{bmatrix}$$

typing...

□

例 2.101 （極座標におけるラプラシアン）

$$\begin{aligned} \triangle &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

typing...

□

§ 2.24 調和関数

定義 2.102 （ラプラス演算子） n 次元座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の空間のラプラス演算子（**Laplace operator**）またはラプラシアン（**Laplacian**）は

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2}$$

により定義される．□

定義 2.103 （調和関数） n 変数関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が

$$\triangle f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

をみたすとき，f を調和関数（**harmonic function**）という．□

例 2.104 （調和関数） 関数

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

は調和関数である．typing...
極座標で表すと，typing... □

例 2.105 （調和関数） 関数

$$f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

は調和関数である．typing...
極座標で表すと，typing... □

例 2.106 （調和関数） 関数

$$f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

は調和関数である．typing...
極座標で表すと，typing... □

§ 2.25 方向微分

定義 2.107 （方向微分） 関数 $f(\boldsymbol{x})$ の点 $\boldsymbol{a}$ における方向 $\boldsymbol{e}$ の方向微分は

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{e}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{e}\|} \lim_{t \to 0} \frac{d}{dt} f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \frac{\boldsymbol{e}}{\|\boldsymbol{e}\|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_k} \frac{e_k}{\|\boldsymbol{e}\|}$$

により定義される．

（証明） typing... □

例 2.108 （方向微分） 関数 $z = f(x,) = x^2 + y^2$ の点 (a, b) における方向 $\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の微分は，

$$f_x = 2x, \quad f_y = 2y, \quad \frac{\boldsymbol{e}}{\|\boldsymbol{e}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

を用いて，

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial \boldsymbol{e}} = f_x(a,b)\alpha + f_y(a,b)\beta = \frac{2a}{\sqrt{2}} + \frac{2b}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(a+b)$$

となる． □

§ 2.26 ライプニッツ則

定理 2.109 （ライプニッツ則） 1 変数関数 $f(x), g(x)$ の積の n 回微分は

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(f(x)g(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}f}{dx^{n-k}} \frac{d^k g}{dx^k}$$

で与えられる．これをライプニッツ則（**Leibnitz rule**）という．

（証明） 積 $f(x)g(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x)g(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx} \\ &= \lim_{y\to x} \frac{df(x)}{dx}g(y) + f(x)\frac{dg(y)}{dy} = \lim_{y\to x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x)g(y)\end{aligned}$$

と表される．よって n 回微分は

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}f(x)g(x) &= \lim_{y\to x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x)g(y) = \lim_{y\to x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^{n-k}}{\partial x^{n-k}}\frac{\partial^k}{\partial y^k}f(x)g(y) \\ &= \lim_{y\to x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^{n-k}f(x)}{\partial x^{n-k}}\frac{\partial^k g(y)}{\partial y^k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^{n-k}f(x)}{\partial x^{n-k}}\frac{\partial^k g(x)}{\partial x^k}\end{aligned}$$

となる． □

例 2.110 （積の微分）

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f'g + gf', \\ &\frac{d^2}{dx^2}f(x)g(x) = f''g + 2f'g' + fg'', \\ &\frac{d^3}{dx^3}f(x)g(x) = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + g''', \\ &\frac{d^4}{dx^4}f(x)g(x) = f^{(4)}g + 4f'''g' + 6f''g'' + 4f'g''' + g^{(4)}\end{aligned}$$

□

問 2.111 （積の微分） $\dfrac{d^{10}}{dx^{10}}f(x)g(x)$ を求めよ． □

§ 2.27 テイラー展開

1 変数関数 $f(x)$ のテイラー展開は，点 a のまわりで x について展開すると

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_{n+1}(x),$$
$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}, \quad \xi = a + (x-a)\theta \quad (0 < \theta < 1)$$

である．$x = a + h$ とおいて，点 a のまわりで $a + h$ についての展開に書き直すと

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_{n+1}, \quad R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

となる．

2 変数関数 $f(x,y)$ のテイラー展開では，点 (a,b) のまわりで点 $(x,y) = (a+h, b+k)$ についての展開を考える．typing...

定理 2.112（テイラー展開） 関数 $f(x,y)$ が $n+1$ 回微分可能なとき，点 (a,b) のまわりで点 $(x,y) = (a+h, b+k)$ についてのテイラー展開（**Taylor expansion**）は，

$$f(a+h,b+k) = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b) + R_{n+1} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{l+m=i \\ 0\le l,m\le i}}\frac{h^l k^m}{l!m!}\frac{\partial^i f(a,b)}{\partial x^l \partial y^m} + R_{n+1},$$
$$f(x,x) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{l+m=i \\ 0\le l,m\le i}}\frac{1}{l!m!}\frac{\partial^i f(a,b)}{\partial x^l \partial y^m}(x-a)^l(y-b)^m + R_{n+1}$$

である与えられる．ただし，R_{n+1} は剰余項（**remainder**）であり，

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k) = \sum_{\substack{l+m=n+1 \\ 0\le l,m\le i}}\frac{h^l k^m}{l!m!}\frac{\partial^i f(a+\theta h, b+\theta k)}{\partial x^l \partial y^m}$$

と与えられる．ただし，$0 < \theta < 1$ である． □

例 2.113（テイラー展開） 関数 $f(x,y)$ を点 (a,b) のまわりで点 $(a+h, b+k)$ について 3 次まで展開し，4 次以降を剰余項で表すと

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + hf_x(a,b) + kf_y(a,b) + \frac{h^2}{2}f_{xx}(a,b) + hkf_{xy}(a,b) + \frac{k^2}{2}f_{yy}(a,b)$$
$$+ \frac{h^3}{3!}f_{xxx}(a,b) + \frac{h^2k}{2}f_{xxy}(a,b) + \frac{hk^2}{2}f_{xyy}(a,b) + \frac{k^3}{3!}f_{yyy}(a,b) + R_4,$$
$$R_4 = \frac{h^4}{4!}f_{xxxx}(a+\theta h, b+\theta k) + \frac{h^3k}{3!}f_{xxxy}(a+\theta h, b+\theta k) + \frac{h^2k^2}{2!2!}f_{xxyy}(a+\theta h, b+\theta k)$$
$$+ \frac{hk^2}{3!}f_{xyyy}(a+\theta h, b+\theta k) + \frac{k^4}{4!}f_{yyyy}(a+\theta h, b+\theta k)$$

となる． □

例 2.114（テイラー展開） 関数 $f(x,y)=x^2y+4y-5$ を点 $(1,-1)$ のまわりで点 (x,y) についてテイラー展開する．まず，偏導関数は

$$f_x=2xy,\quad f_y=x^2+4,\quad f_{xx}=2y,\quad f_{xy}=2x,\quad f_{yy}=0,$$
$$f_{xxx}=0,\quad f_{xxy}=2,\quad f_{xyy}=0,\quad f_{yyy}=0,\quad f_{xxxx}=0,\quad \cdots$$

である．4 階以降の偏導関数はすべて 0 となる．また，点 $(1,-1)$ における偏微係数は

$$f(1,-1)=-10,\quad f_x(1,-1)=-2,\quad f_y(1,-1)=5,$$
$$f_{xx}(1,-1)=-2,\quad f_{xy}(1,-1)=2,\quad f_{yy}(1,-1)=0,$$
$$f_{xxx}(1,-1)=0,\quad f_{xxy}(1,-1)=2,\quad f_{xyy}(1,-1)=0,\quad f_{yyy}(1,-1)=0,$$
$$f_{xxxx}(1,-1)=0,\quad ,\cdots$$

である．これを用いるとテイラー展開は

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(1,-1)+f_x(1,-1)(x-1)+f_y(1,-1)(y+1)\\&\quad+\frac{1}{2}f_{xx}(1,-1)(x-1)^2+f_{xy}(1,-1)(x-1)(y+1)+\frac{1}{2}f_{xx}(1,-1)(y+1)^2\\&\quad+\frac{1}{3!}f_{xxx}(1,-1)(x-1)^3+\frac{1}{2}f_{xxy}(1,-1)(x-1)^2(y+1)+\frac{1}{2}f_{xyy}(1,-1)(x-1)(y+1)^2\\&\quad+\frac{1}{3!}f_{yyy}(1,-1)(y+1)^3+\frac{1}{4!}f_{xxxx}(1,-1)(x-1)^4+0+0+\cdots\end{aligned}$$

より，

$$f(x,y)=-10-2(x-1)+5(y+1)-(x-1)^2+2(x-1)(y+1)+(x-1)^2(y+1)$$

となる．多項式のテイラー展開は，多項式を単に変形した形となる． □

例 2.115（テイラー展開） 関数 $f(x,y)=e^{x+2y}$ を点 $(0,0)$ まわりで点 (h,k) についてテイラー展開する．まず，

$$f_x=e^{x+2y},\quad f_y=2e^{x+2y},\quad f_{xx}=e^{x+2y},\quad f_{xy}=2e^{x+2y},\quad f_{yy}=4e^{x+2y}$$

より

$$f(0,0)=1,\quad f_x(0,0)=1,\quad f_y(0,0)=2,$$
$$f_{xx}(\theta h,\theta k)=e^{\theta h+2\theta k},\quad f_{xy}(\theta h,\theta k)=2e^{\theta h+2\theta k},\quad f_{yy}(\theta h,\theta k)=4e^{\theta h+2\theta k}$$

となるから，1 次項までのテイラー展開は

$$\begin{aligned}f(h,k)&=f(0,0)+hf_x(0,0)+kf_y(0,0)+\frac{h^2}{2}f_{xx}(\theta h,\theta k)+hkf_{xy}(\theta h,\theta k)+\frac{k^2}{2}f_{yy}(\theta h,\theta k)\\&=1+h+2k+\frac{1}{2}(h^2+4hk+4k^2)e^{\theta h+2\theta k}\quad(0<\theta<1)\end{aligned}$$

となる． □

例 2.116（テイラー展開） 関数 $f(x,y)=\sin(xy)$ を点 $(\frac{\pi}{2},1)$ のまわりで点 (x,y) についてテイラー展開する．まず，

$$f_x = y\cos(xy), \quad f_y = x\cos(xy),$$
$$f_{xx} = -y^2\sin(xy), \quad f_{xy} = \cos(xy) - xy\sin(xy), \quad f_{yy} = -x^2\sin(xy)$$

より，

$$f\left(\frac{\pi}{2},1\right) = 1, \quad f_x\left(\frac{\pi}{2},1\right) = 0, \quad f_y\left(\frac{\pi}{2},1\right) = 0,$$
$$f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},1\right) = -1, \quad f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},1\right) = -\frac{\pi}{2}, \quad f_{yy}\left(\frac{\pi}{2},1\right) = -\frac{\pi^2}{4}$$

となるので，テイラー展開は

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f\left(\frac{\pi}{2},1\right) + f_x\left(\frac{\pi}{2},1\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + f_y\left(\frac{\pi}{2},1\right)(y-1) \\ &\quad + f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},1\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},1\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1) + f_{yy}\left(\frac{\pi}{2},1\right)(y-1)^2 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1) - \frac{\pi^2}{8}(y-1)^2 + \cdots \end{aligned}$$

である．展開を途中で打ち切ると $f(x,y)$ の 2 次の近似式 $f_2(x,y)$ が

$$f(x,y) \simeq f_2(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(y-1) - \frac{\pi^2}{8}(y-1)^2$$

と得られる． □

例 2.117（テイラー展開） 関数 $f(x,y)=\log(1+x+y)$ のマクローリン展開を求める．まず，

$$f_x = \frac{1}{1+x+y}, \quad f_y = \frac{1}{1+x+y},$$
$$f_{xx} = \frac{-1}{(1+x+y)^2}, \quad f_{xy} = \frac{-1}{(1+x+y)^2}, \quad f_{yy} = \frac{-1}{(1+x+y)^2},$$
$$f_{xxx} = \frac{2}{(1+x+y)^3}, \quad f_{xxy} = \frac{2}{(1+x+y)^3}, \quad f_{xyy} = \frac{2}{(1+x+y)^3}, \quad f_{yyy} = \frac{2}{(1+x+y)^3},$$
$$\cdots, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^n} = \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y} = \cdots = \frac{\partial^n f}{\partial x\partial y^{n-1}} = \frac{\partial^n f}{\partial y^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x+y)^n}$$

より，

$$f(0,0)=0, \quad f_x(0,0)=1, \quad f_y(0,0)=1, \quad f_{xx}(0,0)=-1, \quad f_{xy}(0,0)=-1, \quad f_{yy}(0,0)=-1,$$
$$\cdots, \quad \frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^n} = \frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^{n-1}\partial y} = \cdots = \frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x\partial y^{n-1}} = \frac{\partial^n f(0,0)}{\partial y^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

となるので，マクローリン展開は

$$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \cdots + \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{(n-l)!\,l!} \frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^{n-l}\partial y^l} x^{n-l}y^l + \cdots$$

$$= x + y - \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + \cdots + \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(n-l)!\,l!} x^{n-l}y^l + \cdots$$

と得られる．

□

§ 2.28 n 変数関数のテイラー展開

定理 2.118 （テイラー展開） 関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の点 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ まわりでの点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (a_1 + h_1, a_2 + h_2, \cdots, a_n + h_n)$ についてテイラー展開は

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{i!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^i f(\boldsymbol{a}) + R_{\nu+1},$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{\substack{l_1+l_2+\cdots+l_n=i \\ 0 \le l_j \le i}} \frac{{h_1}^{l_1}{h_2}^{l_2}\cdots{h_n}^{l_n}}{l_1!l_2!\cdots l_n!} \frac{\partial^i f(\boldsymbol{a})}{\partial {x_1}^{l_1}\partial {x_2}^{l_2}\cdots\partial {x_n}^{l_n}} + R_{\nu+1},$$

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{\substack{l_1+l_2+\cdots+l_n=i \\ 0 \le l_j \le i}} \frac{1}{l_1!l_2!\cdots l_n!} \frac{\partial^i f(\boldsymbol{a})}{\partial {x_1}^{l_1}\partial {x_2}^{l_2}\cdots\partial {x_n}^{l_n}} (x_1 - a_1)^{l_1}(x_2 - a_2)^{l_2}\cdots(x_n - a_n)^{l_n} + R_{\nu+1}$$

となる．

□

§ 2.29 平均値の定理

定理 2.119 （平均値の定理） 関数 $f(x)$ が連続かつ微分可能であるとき，

$$\frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} = f'(\xi), \qquad a_1 < \xi < a_2$$

をみたす ξ が存在する．

□

定理 2.120 （平均値の定理） 関数 $f(x,y)$ が連続かつ全微分可能であるとき，

$$f(a_2, b_2) - f(a_1, b_1) = f_x(\xi,\eta)(a_2 - a_1) + f_y(\xi,\eta)(b_2 - b_1), \qquad a_1 < \xi < a_2, \quad b_1 < \eta < b_2$$

をみたす ξ, η が存在する．

□

問 2.121 （平均値の定理） 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\log \frac{x+y}{2} = \frac{x+y-2}{x+y-\theta(x+y-2)}, \qquad 0 < \theta < 1, \quad x > 0, \quad y > 0$$

□

§ 2.30 1 変数の陰関数

定義 2.122 （陰関数） 変数 x, y が条件 $F(x,y)=0$ をみたすとき，y は x の関数 $y=f(x)$ であり，または x は y の関数 $x=g(y)$ であるとみなせる．すなわち，

$$F(x,f(x))=0, \qquad F(g(y),y)=0$$

により定義される関数 $f(x), g(y)$ を，$F(x,y)=0$ で定義される陰関数（**implicit function**）という．

□

注意 2.123 （陽関数） 関数 $y=f(x)=ax+b$ や $y=f(x)=x^2$ などの関数は陽に（**explicit**）表されているという．

□

定理 2.124 （陰関数の微分） 条件 $F(x,y)=0$ で定義される陰関数 $y=f(x)$ の導関数は，$F_y(x,y)\neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

で与えられる．

（証明） 関数 $y=f(x)$ を $F(x,y)=0$ に代入すると

$$F(x,f(x))=0$$

である．両辺を x で偏微分すると

$$0=\frac{d}{dx}F(x,y)=F_x(x,y)\frac{\partial x}{\partial x}+F_y(x,y)\frac{\partial y}{\partial x}=F_x(x,y)+F_y(x,y)\frac{dy}{dx}$$

となるので，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$ を得る．

□

例 2.125 （陰関数） 条件 $xe^{-y}=y\sin x$ で定義される陰関数 $y=f(x)$ の導関数を求める．

条件 $xe^{-y}=y\sin x$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{-y}\right)=\frac{d}{dx}\left(y\sin x\right) \quad \Rightarrow \quad x'(e^{-y})+x(e^{-y})'=y'(\sin x)+y(\sin x)'$$
$$\Rightarrow \quad e^{-y}-xy'e^{-y}=y'\sin x+y\cos x \quad \Rightarrow \quad e^{-y}-y\cos x=(\sin x+xe^{-y})y'$$

となるので，

$$y'=\frac{e^{-y}-y\cos x}{\sin x+xe^{-y}}$$

を得る．

□

例 2.126 （陰関数） xy 平面内の円 $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ を考える．このとき，y は x の関数 $y=f(x)$ とみなされる．これを陽に書くと

$$y=f(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$$

となる．これは 2 価関数である．多価関数のままでは取り扱いに面倒が多い．$y=f(x)$ を陰関数として取り扱い導関数を求める．条件 $F(x,y)=0$ に $y=f(x)$ を代入すると

$$x^2+f(x)^2-1=0$$

である．両辺を x で微分すると

$$2x+2f(x)f'(x)=0$$

となり，

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

を得る．さらに微分すると 2 階導関数と 3 階導関数は

$$\begin{aligned}
y''=f''(x)&=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{1}{y}+\frac{xy'}{y^2}=-\frac{1}{y}-\frac{x^2}{y^3}=-\frac{(x^2+y^2)}{y^3}=-\frac{1}{y^3},\\
y'''=f'''(x)&=\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{y^3}\right)=\frac{3y'}{y^4}=-\frac{3x}{y^5}
\end{aligned}$$

となる．y は 2 価関数であるから y', y'', y''' も 2 価関数である．

次に，円 $F=0$ 上の点 $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ において，関数 $y=f(x)$ を点 $x=\frac{1}{2}$ まわりでテイラー展開する．$x=\frac{1}{2}, y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ であることに注意すると

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}=-\frac{8}{3\sqrt{3}},\quad f''\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5}=-\frac{16}{3\sqrt{3}}$$

となるので，テイラー展開は

$$\begin{aligned}
y&=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{8}{3\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{8}{3\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots
\end{aligned}$$

と得られる． □

例 2.127 （陰関数） 条件

$$F(x,y)=x^3+3xy+4xy^2+y^2+y-2=0$$

により定義される陰関数 $y = f(x)$ を考える．y は陽に書くと，2 次方程式

$$(4x+1)y^2 + (3x+1)y + (x^3-2) = 0$$

を解いて，

$$y = f(x) = \frac{3x+1 \pm \sqrt{(3x+1)^2 - 4(4x+1)(x^3-2)}}{8x+2}$$

と表される．しかし，この形では取り扱いが面倒であるから，陰関数として取り扱う．導関数 $y' = f'(x)$ は

$$F_x = 3x^2 + 3y + 4y^2, \quad F_y = 3x + 8xy + 2y + 1$$

を用いて，

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{3x^2+3y+4y^2}{3x+8xy+2y+1}$$

と求まる． □

例 2.128 （陰関数） 条件 $F(x,y) = x^3 + xy^2 - 2 = 0$ で定義される陰関数 $y = f(x)$ を考える．条件 $x^3 + xy^2 - 2 = 0$ の両辺を x で微分すると

$$(☆) \qquad 0 = (x^3 + xy^2 - 2)' = (x^3)' + x'y^2 + x(y^2)' + 0 = 3x^2 + y^2 + 2xyy'$$

となる．よって

$$y' = -\frac{3x^2+y^2}{2xy}$$

を得る．(☆) をさらに x で微分すると

$$\begin{aligned} 0 &= (3x^2 + y^2 + 2xyy')' = 3(x^2)' + (y^2)' + 2(x)'yy' + 2x(y)'y' + 2xy(y')' \\ &= 6x + 2yy' + 2yy' + 2xy'^2 + 2xyy'' = 6x + 4yy' + 2xy'^2 + 2xyy'' \\ &= 6x + 4y\left(-\frac{3x^2+y^2}{2xy}\right) + 2x\left(-\frac{3x^2+y^2}{2xy}\right)^2 + 2xyy'' \end{aligned}$$

となる．両辺に $(2xy)^2$ を掛けてまとめると

$$\begin{aligned} 0 &= 6x(2xy)^2 - 4y(3x^2+y^2)(2xy) + 2x(3x^2+y^2) + 2xyy''(2xy)^2 \\ &= 9x^4 - 3y^4 + 6x^2y^2 + 4x^2y^3y'' = 3(3x^2-y^2)(x^2+y^2) + 4x^2y^3y'' \end{aligned}$$

となる．また条件より $x^2 + y^2 = 2/x$ であることを用いると

$$y'' = -\frac{3(3x^2-y^2)(x^2+y^2)}{4x^2y^3} = -\frac{3(3x^2-y^2)}{2x^3y^3}$$

を得る．

曲線 $F = 0$ 上の点 $(1, 1)$ において，関数 $y = f(x)$ を $x = 1$ のまわりでテイラー展開する．$(x, y) = (1, 1)$ であることを用いて

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = -2, \quad f''(1) = -3$$

であるから，

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 + \cdots = 1 - 2(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2 + \cdots$$

と得られる． □

問 2.129 （陰関数） 次の条件で定義される陰関数 $y = f(x)$ の導関数を求めよ．

(1) $x^3 + 3x^2y + 2xy^2 + 3y^3 = 4$ (2) $x + y = e^{xy}$ (3) $\log(x^2 + y^2) = 2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ □

§ 2.31 接線

注意 2.130 （曲線の法線ベクトル） xy 平面内の曲線 $F(x,y)=0$ 上の点をパラメータ表示し，$(x(t),y(t))$ とおく．このとき，曲線上の 2 点 $P(x(t),y(t)), Q(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t))$ は Δt が十分小さいときテイラー展開して

$$\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{x}(t+\Delta)-\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}'(t)\Delta t+O(\Delta t^2)$$

と表される．$\Delta t\to 0$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ の向きと接線の方向ベクトル $\boldsymbol{p}$ の向きは等しくなる．よって，接線の方向ベクトルは $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{x}'(t)$ である．一方，$F(x(t),y(t))=0$ の両辺を t で微分すると

$$F_x(x,y)x'(t)+F_y(x,y)y'(t)=0$$

となる．ベクトルで表すと

$$\nabla F(x,y)\cdot\boldsymbol{x}'(t)=0$$

となる．∇F は $\boldsymbol{x}'(t)$ と直交する．よって，接線の法線ベクトルは $\boldsymbol{n}=\nabla F(x,y)$ である． □

定理 2.131 （接線） 曲線 $F(x,y)=0$ の点 (a,b) における接線の方程式は

$$F_x(a,b)(x-a)+F_y(a,b)(y-b)=0$$

で与えられる．ベクトルで表記すると

$$\nabla F(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0$$

となる．

（証明） 接線は点 (a,b) を通り，法線ベクトルが $\nabla F(a,b)$ の直線であるので，$\nabla F(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0$ を得る．または，次のようにも示される．条件 $F(x,y)=0$ により定義される陰関数 $y=f(x)$ を考える．このとき y の導関数は

$$y'=f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

である．$y=f(x)$ の $x=a$ における接線の方程式は

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)=f(a)-\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,a)}(x-a)\quad\Rightarrow\quad F_x(a,b)(x-a)+F_y(a,b)(y-b)=0$$

と表される．ただし，$b=f(a)$ とおく．

□

例 2.132 （接線の方程式） 円 $F = x^2 + y^2 - 1 = 0$ の点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求める．接線の法線ベクトルは

$$F_x = 2x, \quad F_y = 2y$$

を用いて ∇F であり，点 (x_0, y_0) を通る直線であるから，

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0x + y_0y - ({x_0}^2 + {y_0}^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0x + y_0y = 1$$

を得る．

□

例 2.133 （接線の方程式） 曲線 $F = x^3 + 3xy + 4xy^2 + y^2 + y - 2 = 0$ の点 $(1, -1)$ における接線の方程式を求める．

$$F_x = 3x^2 + 3y + 4y^2, \quad F_y = 3x + 8xy + 2y + 1, F_x(1, -1) = 4, \quad F_y(1, -1) = -6$$

より，接線は

$$F_x(1, -1)(x - 1) + F_y(1, -1)(y + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 3y - 5 = 0$$

と得られる．方程式を書き直して

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

とする．接線の傾きは $\frac{2}{3}$ で y 切片は $-\frac{5}{3}$ である．

$$\frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{\frac{-5}{3}} = 1$$

と書き直す．接線の x 切片は $\frac{5}{2}$ で y 切片は $-\frac{5}{3}$ である．

□

§ 2.32 2 変数の陰関数

定義 2.134 （陰関数） 変数 x, y, z が条件 $F(x, y, z) = 0$ をみたすとき，z は x, y の関数 $z = f(x, y)$ であるとみなせる．すなわち，

$$F(x, y, f(x, y)) = 0$$

により定義される関数 $f(x, y)$ を，$F(x, y, z) = 0$ で定義される陰関数（**implicit function**）という．

□

例 2.135 （陰関数） 条件

$$F(x, y, z) = x^2 + 3xy - 2yz + xz + z^2 - 15 = 0$$

により定まる陰関数 $z = f(x, y)$ の偏導関数を求める．$z = f(x, y)$ を代入すると

$$x^2 + 3xy - 2yf(x, y) + xf(x, y) + f(x, y)^2 - 15 = 0$$

となる．両辺を x で偏微分すると

$$\begin{aligned}
(x^2 + 3xy - 2yf(x, y) + xf(x, y) + f(x, y)^2 - 15)_x &= 0,\\
(x^2)_x + (3xy)_x - (2yf(x, y))_x + (xf(x, y))_x + (f(x, y)^2)_x - (15)_x &= 0,\\
(x^2)_x + 3y(x)_x - 2y(f(x, y))_x + (xf(x, y))_x + (f(x, y)^2)_x - 15(1)_x &= 0,\\
2x + 3y - 2yf_x(x, y) + f(x, y) + xf_x(x, y) + 2f(x, y)f_x(x, y) &= 0,\\
(-2y + x + 2f(x, y))f_x(x, y) + (2x + 3y + f(x, y)) &= 0,\\
(-2y + x + 2z)f_x(x, y) + (2x + 3y + z) &= 0
\end{aligned}$$

となので，

$$f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x + 3y + z}{-2y + x + 2z}$$

を得る．同様にして y で偏微分すると

$$\begin{aligned}
(x^2 + 3xy - 2yf(x, y) + xf(x, y) + f(x, y)^2 - 15)_y &= 0,\\
(x^2)_y + (3xy)_y - (2yf(x, y))_y + (xf(x, y))_y + (f(x, y)^2)_y - (15)_y &= 0,\\
x^2(1)_y + 3x(y)_y - 2(yf(x, y))_y + x(f(x, y))_y + (f(x, y)^2)_y - 15(1)_y &= 0,\\
3x - 2f(x, y) - 2yf_y(x, y) + xf_y(x, y) + 2f(x, y)f_y(x, y) &= 0,\\
(-2y + x + 2f(x, y))f_y(x, y) + (3x - 2f(x, y)) &= 0,\\
(-2y + x + 2z)f_y(x, y) + (3x - 2z) &= 0
\end{aligned}$$

となるので，

$$f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3x - 2z}{-2y + x + 2z}$$

を得る．

□

定理 2.136 （陰関数の微分） 条件 $F(x,y,z)=0$ で定義される陰関数 $z=f(x,y)$ の偏導関数は，$F_z(x,y,z)\neq 0$ のとき

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)},\qquad f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

で与えられる．

（証明） 条件 $0=F(x,y,z)$ に $z=f(x,y)$ を代入して，両辺を x で偏微分すると

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,f(x,y))=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\\&=\frac{\partial F}{\partial x}\times 1+\frac{\partial F}{\partial y}\times 0+\frac{\partial F}{\partial z}f_x(x,y)=F_x(x,y,z)+F_z(x,y,z)f_x(x,y)\end{aligned}$$

となるので，$f_x=-F_x/F_z$ を得る．同様にして y で偏微分すると

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,f(x,y))=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\\&=\frac{\partial F}{\partial x}\times 0+\frac{\partial F}{\partial y}\times 1+\frac{\partial F}{\partial z}f_y(x,y)=F_y(x,y,z)+F_z(x,y,z)f_y(x,y)\end{aligned}$$

となるので，$f_y=-F_y/F_z$ を得る． □

例 2.137 （陰関数） 条件

$$F(x,y,z)=x^2+3xy-2yz+xz+z^2-15=0$$

により定まる陰関数 $z=f(x,y)$ の偏導関数を求める．まず，

$$F_x=2x+3y+z,\quad F_y=3x-2z,\quad F_z=-2y+x+2z$$

より，偏導関数は

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x+3y+z}{-2y+x+2z},\qquad z_y=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{3x-2z}{-2y+x+2z}$$

と得られる． □

例 2.138 （陰関数） 条件

$$F(x,y,z)=x^2+3xy-2yz+xz+z^2-15=0$$

により定まる陰関数 $z=f(x,y)$ の 2 階偏導関数 z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} を求める．条件 $F=0$ の両辺を x で偏微分すると

$$(\text{☆})\qquad(-2y+x+2z)z_x+(2x+3y+z)=0$$

である．さらに x で偏微分すると

$$\begin{aligned}0 &= ((-2y+x+2z)z_x + (2x+3y+z))_x \\ &= (-2y+x+2z)_x z_x + (-2y+x+2z)z_{xx} + (2x+3y+z)_x \\ &= (1+2z_x)z_x + (-2y+x+2z)z_{xx} + (2+z_x) \\ &= (2+2z_x+2{z_x}^2) + (-2y+x+2z)z_{xx}\end{aligned}$$

となるから，

$$z_{xx} = -\frac{2+2z_x+2{z_x}^2}{-2y+x+2z} = \cdots = -\frac{2(19y^2+9xy-6yz+3x^2+3xz+3z^2)}{(-2y+x+2z)^3}$$

を得る．(☆) の両辺を y で偏微分すると

$$\begin{aligned}0 &= ((-2y+x+2z)z_x + (2x+3y+z))_y \\ &= (-2y+x+2z)_y z_x + (-2y+x+2z)z_{xy} + (2x+3y+z)_y \\ &= (-2+2z_y)z_x + (-2y+x+2z)z_{xy} + (3+z_y) \\ &= (3-2z_x+z_y+2z_xz_y) + (-2y+x+2z)z_{xy}\end{aligned}$$

となるから，

$$z_{xy} = -\frac{3-2z_x+z_y+2z_xz_y}{-2y+x+2z} = \cdots = -\frac{2(5xy-16yz+8x^2+8xz+8z^2)}{(-2y+x+2z)^3}$$

を得る．条件 $F=0$ の両辺を y で偏微分すると

$$(-2y+x+2z)z_y + (3x-2z) = 0$$

である．さらに y で偏微分すると

$$\begin{aligned}0 &= ((-2y+x+2z)z_y + (3x-2z))_y \\ &= (-2y+x+2z)_y z_y + (-2y+x+2z)z_{yy} + (3x-2z)_y \\ &= (-2+2z_y)z_y + (-2y+x+2z)z_{yy} - 2z_y \\ &= (-4z_y+2{z_y}^2) + (-2y+x+2z)z_{yy}\end{aligned}$$

となるから，

$$z_{yy} = -\frac{-4z_y+2{z_y}^2}{-2y+x+2z} = \cdots = -\frac{2(3x-2z)(5x-4y+2z)}{(-2y+x+2z)^3}$$

を得る． □

問 2.139 （陰関数） 次の条件で定義される陰関数 $z=f(x,y)$ の導関数を求めよ．

(1) $z = x^2+4xy+y^3$ (2) $3x^3+4y^2z = z^4+10$ (3) $3x^2+4y^2-5z^2 = 20$

(4) $y = \dfrac{x}{z^2} - \dfrac{z}{x^2}$ (5) $x^2+2y+3z+5 = \log z$ (6) $z = e^x\sin(y+z)+1$

(7) $z = \sin(2x+1)\cos(y^2+4)$ (8) $\sin xy + \sin yz + \sin xz = 1$ □

§ 2.33 陰関数の高階導関数

問 2.140 (陰関数の高階偏導関数)　条件 $F(x,y)=0$ で定まる陰関数 $y=f(x)$ の高階導関数を求めよ．

(答え)　条件 $F(x,y)=0$ の両辺を x で微分すると

$$0=\frac{d}{dx}F(x,y)=F_x+F_y y'$$

となる．さらに微分すると

$$\begin{aligned}0&=\frac{d^2}{dx^2}F(x,y)=\frac{d}{dx}(F_x+F_y y')=\frac{d}{dx}F_x+\frac{d}{dx}(F_y y')=\frac{d}{dx}F_x+\left(\frac{d}{dx}F_y\right)y'+F_y\frac{d}{dx}y'\\&=F_{xx}+F_{xy}y'+(F_{xy}+F_{yy}y')y'+F_y y''=F_{xx}+2F_{xy}y'+F_{yy}y'^2+F_y y''\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}y''&=-\frac{F_{xx}+2F_{xy}y'+F_{yy}y'^2}{F_y}=-\frac{F_{xx}+2F_{xy}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)+F_{yy}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)^2}{F_y}\\&=-\frac{F_{xx}{F_y}^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}{F_x}^2}{{F_y}^3}\end{aligned}$$

を得る．同様にして $y''',\cdots$ を求める．　□

問 2.141 (陰関数の高階偏導関数)　条件 $F(x,y,z)=0$ で定まる陰関数 $z=f(x,y)$ の高階偏導関数を求めよ．

(答え)　条件 $F(x,y,z)=0$ の両辺を x と y で偏微分するとそれぞれ

$$0=\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z)=F_x+F_z z_x,\qquad 0=\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,z)=F_y+F_z z_y$$

となる．第 1 式をさらに x で偏微分すると

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(F_x+F_z z_x)=\frac{\partial}{\partial x}F_x+\left(\frac{\partial}{\partial x}F_z\right)z_x+F_z\frac{\partial}{\partial x}z_x\\&=F_{xx}+F_{xz}z_x+(F_{zx}+F_{zz}z_x)z_x+F_z z_{xx}=F_{xx}+2F_{xz}z_x+F_{zz}{z_x}^2+F_z z_{xx}\end{aligned}$$

となるので，

$$z_{xx}=-\frac{F_{xx}+2F_{xz}z_x+F_{zz}{z_x}^2}{F_z}=-\frac{F_{xx}{F_z}^2-2F_{xz}F_xF_z+F_{zz}{F_x}^2}{{F_z}^3}$$

を得る．第 1 式をさらに y で偏微分すると

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}F(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}(F_x+F_z z_x)=\frac{\partial}{\partial y}F_x+\left(\frac{\partial}{\partial y}F_z\right)z_x+F_z\frac{\partial}{\partial y}z_x\\&=F_{xy}+F_{xz}z_y+(F_{zy}+F_{zz}z_y)z_x+F_z z_{xy}=F_{xy}+F_{yz}z_x+F_{xz}z_y+F_{zz}z_xz_y+F_z z_{xy}\end{aligned}$$

となるので，

$$z_{xy} = -\frac{F_{xy} + F_{yz}z_x + F_{xz}z_y + F_{zz}z_x z_y}{F_z} = -\frac{F_{xy}{F_z}^2 - F_{yz}F_xF_z - F_{xz}F_yF_z + F_{zz}F_xF_y}{{F_z}^3}$$

を得る．第 2 式をさらに y で偏微分すると

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}F(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(F_y + F_z z_y) = \frac{\partial}{\partial y}F_y + \left(\frac{\partial}{\partial y}F_z\right) z_y + F_z\frac{\partial}{\partial y}z_y \\ &= F_{yy} + F_{yz}z_y + (F_{zy} + F_{zz}z_y)z_y + F_z z_{yy} = F_{yy} + 2F_{yz}z_y + F_{zz}{z_y}^2 + F_z z_{yy} \end{aligned}$$

となるので，

$$z_{yy} = -\frac{F_{yy} + 2F_{yz}z_y + F_{zz}{z_y}^2}{F_z} = -\frac{F_{yy}{F_z}^2 - 2F_{yz}F_yF_z + F_{zz}{F_y}^2}{{F_z}^3}$$

を得る．同様にして $z_{xxx}, \cdots$ を求める． □

§ 2.34 接平面

注意 2.142 （曲面の法線ベクトル） 曲面 $F(x,y,z)=0$ 上の曲線をパラメータ表示して $(x(t),y(t),z(t))$ とおく．このとき，

$$F(x(t),y(t),z(t))=0$$

が成り立つ．両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned}0=\frac{d}{dt}F(x(t),y(t),z(t))&=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}\\&=F_x(x,y,z)x'(t)+F_y(x,y,z)y'(t)+F_z(x,y,z)z'(t)\end{aligned}$$

となる．ベクトル表記すると

$$\nabla F(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x}'(t)=0$$

である．$\nabla F(\boldsymbol{x})$ は曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ の接ベクトルと常に直交する．

曲面 $F=0$ 上の点 (a,b,c) において，この点を通るあらゆる曲線 $(x(t),y(t),z(t))$ を考える．便宜上 $x(0)=a$, $y(0)=b$, $z(0)=c$ とおく．あるベクトル $\boldsymbol{n}$ がこの曲線の接ベクトル $\boldsymbol{x}'(0)$ と常に直交するとする．このとき，$\boldsymbol{n}$ を曲面 $F=0$ の法線ベクトルという．曲線の接ベクトル $\boldsymbol{x}'(0)$ に直交するベクトルは ∇F であるから，法線ベクトルは $\boldsymbol{n}=\nabla F(\boldsymbol{a})$ である． □

定理 2.143 （接平面） 曲面 $F(x,y,z)=0$ の点 (a,b,c) における接平面（**tangent plane**）は

$$F_x(a,b,c)(x-a)+F_y(a,b,c)(y-b)+F_z(a,b,c)(z-c)=0$$

で与えられる．ベクトルで表記すると

$$\nabla F(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0$$

となる． □

注意 2.144 （接平面） グラフ $z=f(x,y)$ の点 (a,b) における接平面は，$F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$ とおき接平面を求めればよい．$F_x=f_x$, $F_y=f_y$, $F_z=-1$ であるか，

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)-(z-f(a,b))=0$$

となり，接平面は

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

と表される．この右辺は関数 $f(x,y)$ の点 (a,b) まわりのテイラー展開の 1 次近似と等しい． □

例 2.145 （接平面） 球 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$ の点 (x_0,y_0,z_0) における接平面を求める．

$$F_x=2x,\quad F_y=2y,\quad F_z=2z,\quad F_x(x_0,y_0,z_0)=2x_0,\quad F_y(x_0,y_0,z_0)=2y_0,\quad F_z(x_0,y_0,z_0)=2z_0$$

より，接平面は

$$\begin{aligned}&F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0\\ \Rightarrow\quad &2x_0(x-x_0)+2y_0(x-y_0)+2z_0(x-z_0)=0\\ \Rightarrow\quad &x_0x+y_0y+z_0z-(x_0^2+y_0^2+z^2)=0\quad\Rightarrow\quad x_0x+y_0y+z_0z=1\end{aligned}$$

と求まる．法線ベクトルが $\begin{bmatrix}x_0 & y_0 & z_0\end{bmatrix}^T$ の平面である． □

問 2.146 （接平面） 曲面 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$ の点 (x_0,y_0,z_0) における接平面を求めよ． □

例 2.147 （接平面） 曲面

$$F(x,y,z)=x^2+3xy-2yz+xz+z^2-3=0$$

の点 $(2,0,-1)$ における接平面を求める．まず，

$$\begin{aligned}&F_x=2x+3y+z,\quad F_y=3x-2z,\quad F_z=-2y+x+2z,\\ &F_x(2,0,-1)=3,\quad F_y(2,0,-1)=8,\quad F_z(2,0,-1)=0,\end{aligned}$$

より，接平面は

$$3(x-2)+8(y-0)+0(z+1)=0\quad\Rightarrow\quad 3x+8y-6=0$$

である．法線ベクトルが $\begin{bmatrix}3 & 8 & 0\end{bmatrix}^T$ の平面である．書き直して

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{\frac{3}{4}}=1$$

とする．x 軸，y 軸との交点は $x=2, y=\frac{3}{4}$ である．z 軸とは交点をもたず，z 軸と平行な平面である． □

例 2.148 （接平面） 関数 $z=f(x,y)=4x^2y+xy^3$ の点 $(-1,1)$ における接平面は，

$$f_x=8xy+y^3,\quad f_y=4x^2+3xy^2,\quad f(-1,1)=3,\quad f_x(-1,1)=-7,\quad f_y(-1,1)=1$$

より，

$$z=f(-1,1)+f_x(-1,1)(x+1)+f_y(-1,1)(y-1)=3-7(x+1)+(y-1)=-7x+y-5$$

と得られる．接平面を標準形で書くと

$$7x - y + z + 5 = 0$$

である．この平面の法線ベクトルは $\begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ である．また，

$$\frac{x}{-\frac{5}{7}} + \frac{y}{5} + \frac{z}{-5} = 1$$

と書き直す．平面と x 軸，y 軸，z 軸の交点は $x = -\frac{5}{7}, y = 5, z = -5$ である． □

§ 2.35 極値

定義 2.149 （極値） 関数 $f(x,y)$ が，点 (a,b) とその任意の近傍の点 $(a+h,b+k)$ に対して

$$f(a,b) > f(a+h,b+k)$$

をみたすとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極大値 $f(a,b)$ をとるという．また，

$$f(a,b) < f(a+h,b+k)$$

をみたすとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極小値 $f(a,b)$ をとるという．極大値，極小値を総称して極値という． □

定理 2.150 （極値の必用条件） 関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとるとき，

$$f_x(a,b) = 0, \qquad f_y(a,b) = 0$$

が成り立つ（注意）逆は成り立たない．

（証明） 平面 $y=b$ と曲面 $z=f(x,y)$ との共有点からなる曲線 $z=f(x,b)$ は x についての 1 変数関数であり，$f(x,y)$ が極値をとるとき $f(x,b)$ も極値をとる．よって，$f_x(a,b)=0$ となる．同様にして，平面 $x=a$ を考えると $f_y(a,b)=0$ を得る． □

注意 2.151 （極値と接平面） 関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) で極値をとるとする．このとき $f_x(a,b)=0, f_y(a,b)=0$ であるから，$f(x,y)$ を点 (a,b) のまわりでテイラー展開すると

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2}f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}f_{yy}(a,b)(y-b)^2 + \cdots$$

となり，1 次の項は存在しない．また，曲面 $z=f(x,y)$ の点 (a,b) における接平面の方程式は

$$z = f(a,b)$$

となり，法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

である．接平面は xy 平面に平行である． □

例 2.152 （極値の計算例） 関数 $f(x,y)=x^4+y^4$ の極値を考える．連立方程式

$$f_x(x,y)=4x^3=0, \quad f_y(x,y)=4y^3=0$$

を解くと候補の点 $(x,y)=(0,0)$ を得る．このとき点 $(0,0)$ とその任意の近傍の点 (h,k) に対して，

$$f(h,k)-f(0,0)=h^4+k^4>0 \quad \Rightarrow \quad f(h,k)>f(0,0)$$

が成り立つ．よって関数 $f(x,y)$ は極小値 $f(0,0)=0$ をとる． □

例 2.153 （鞍点） 関数 $f(x,y)=x^2-y^2$ の極値を考える．連立方程式

$$f_x(x,y)=2x=0, \quad f_y(x,y)=-2y=0$$

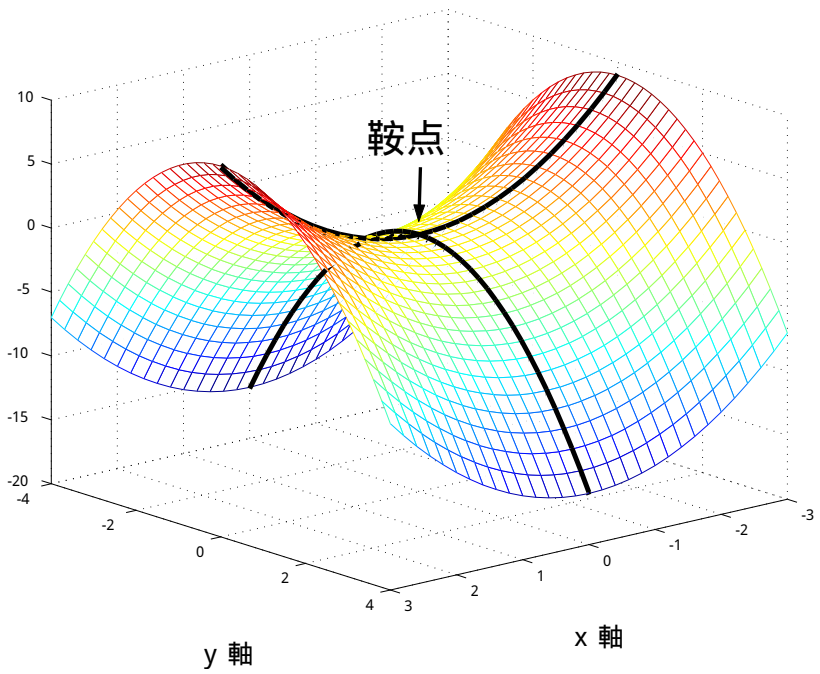
を解くと候補の点 $(x,y)=(0,0)$ を得る．しかし，$f(0,0)=0$ は極値とはならない．なぜなら，点 $(0,0)$ と x 軸方向にずれた近傍の点 $(h,0)$ に対しては，

$$f(h,0)-f(0,0)=h^2>0 \quad \Rightarrow \quad f(h,0)>f(0,0)$$

となり，$f(0,0)$ は極小となる．一方，点 $(0,0)$ と y 軸方向にずれた近傍の点 $(0,k)$ に対しては，

$$f(0,k)-f(0,0)=-k^2<0 \quad \Rightarrow \quad f(0,k)<f(0,0)$$

となり，$f(0,0)$ は極大となる．このようにある方向では極小であり，また別の方向では極大となる点のことを鞍点（**saddle point**）という．



□

定理 2.154 （極値） 関数 $f(x,y)$ において点 (a,b) が $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ をみたすとき，$f(a,b)$ が極値となるための判定条件は次の通りである．ただし，

$$D(a,b)=f_{xy}(a,b)^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$$

とおく．

(i) $D(a,b)<0$, $f_{xx}(a,b)>0$ のとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極小値をとる．

(ii) $D(a,b)<0$, $f_{xx}(a,b)<0$ のとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極大値をとる．

(iii) $D(a,b)>0$ のとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で極値をとらない．

(iv) $D(a,b)=0$ のとき，個別に判定する．

（証明） typing... □

例 2.155 （極値の計算例） 関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ の極値を求める．連立方程式

$$f_x=2x=0, \qquad f_y=2y=0$$

を解くと極値の候補として $(x,y)=(0,0)$ を得る．このとき，

$$f_{xx}=2>0, \quad f_{xy}=0, \quad f_{yy}=2, \quad D={f_{xy}}^2-f_{xx}f_{yy}=-4<0$$

となる．よって，$f(0,0)=0$ は極小値である． □

例 2.156 （極値の計算例） 関数 $f(x,y)=x^2+y^3$ の極値を求める．連立方程式

$$f_x=2x=0, \qquad f_y=3y^2=0$$

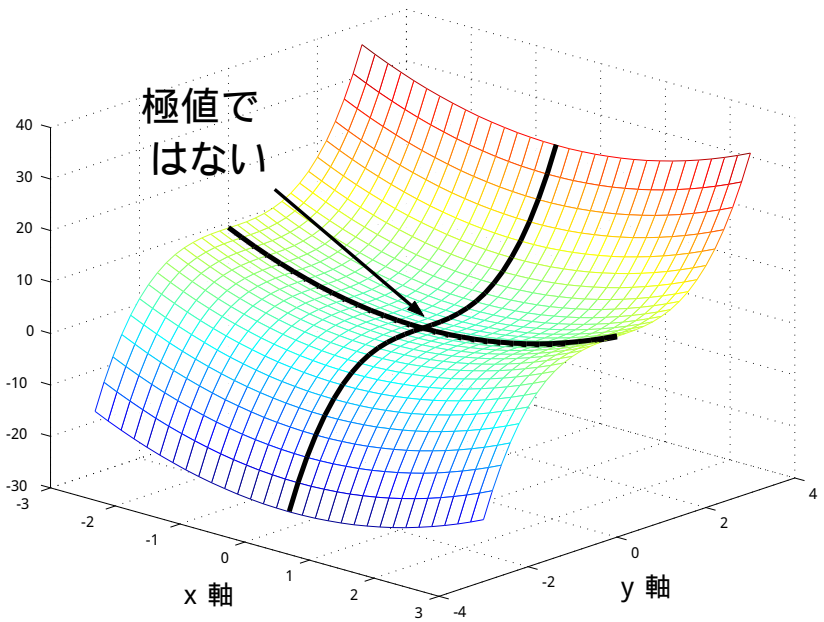
を解くと極値の候補として $(x,y)=(0,0)$ を得る．このとき，

$$f_{xx}(x,y)=2, \quad f_{xy}(x,y)=0, \quad f_{yy}(x,y)=6y, \quad D(x,y)={f_{xy}}^2-f_{xx}f_{yy}=-12y$$

となる．$D(0,0)=0$ であるから判別式 D を用いて極値となるかは判定できない．そこで，点 $(0,0)$ とその近傍の点 $(0,k),(0,-k)$ を考える．ただし，$k>0$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} f(0,k)-f(0,0)=k^3>0 \quad &\Rightarrow \quad f(0,k)>f(0,0) \\ f(0,-k)-f(0,0)=-k^3<0 \quad &\Rightarrow \quad f(0,-k)<f(0,0) \end{aligned}$$

が成り立つ．点 $(0,0)$ から y 軸正の方向には増加傾向であり，y 軸負の方向には減少傾向となるので，$f(0,0)=0$ は極値ではない．



□

例 2.157 （極値の計算例） 関数 $f(x,y)=x^2+y^2-2x+4y+10$ の極値を求める．連立方程式

$$f_x=2x-2=0, \qquad f_y=2y+4=0$$

を解くと極値の候補として $(x,y)=(1,-2)$ を得る．このとき，

$$f_{xx}=2>0, \quad f_{xy}=0, \quad f_{yy}=2, \quad D={f_{xy}}^2-f_{xx}f_{yy}=-4<0$$

となる．よって，$f(1,-2)=5$ は極小値である． □

例 2.158 （極値の計算例） 関数 $f(x,y)=x^3+y^3+3xy+2$ の極値を求める．連立方程式

$$f_x=3x^2+3y=0, \qquad f_y=3y^2+3x=0$$

を解く．第 1 式を $y=-x^2$ と変形して第 2 式に代入すると

$$x(x^3+1)=0$$

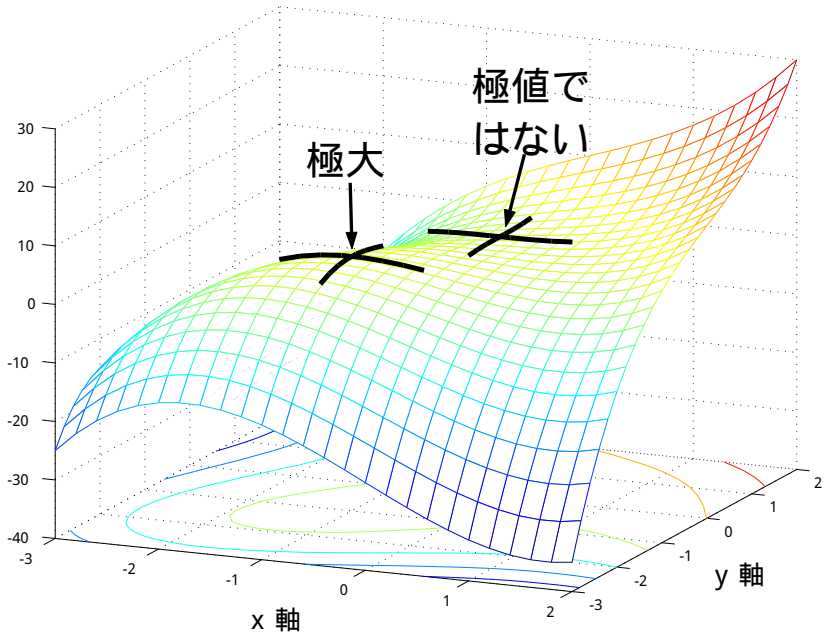
となる．これを解くと，極値の候補として

$$(x,y)=(0,0),(-1,-1)$$

を得る．このとき，

$$f_{xx}(x,y)=6x, \quad f_{xy}(x,y)=3, \quad f_{yy}(x,y)=6y, \quad D(x,y)={f_{xy}}^2-f_{xx}f_{yy}=9-36xy$$

を用いて極値であるか判定する．まず，$(x,y)=(0,0)$ の場合．$D(0,0)=9>0$ より $f(0,0)=2$ は極値ではない．次に，$(x,y)=(-1,-1)$ の場合．$D(-1,-1)=-27<0$, $f_{xx}(-1,-1)=-6<0$ より，$f(-1,-1)=1$ は極大値である．



□

問 2.159 （極値） 次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x,y)=1-2x^2-xy-y^2+2x-3y$ (2) $f(x,y)=x^2-2xy+y^2-x^4-y^4$ □

§ 2.36 条件付き極値問題

定理 2.160 （ラグランジュの未定乗数法） 条件 $g(x,y)=0$ のもとでの関数 $f(x,y)$ の極値の候補は，$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ とおき，(x,y,λ) についての連立方程式

$$F_x(x,y,\lambda)=0,\quad F_y(x,y,\lambda)=0,\quad F_\lambda(x,y,\lambda)=0$$

を解くことで得られる．これをラグランジュの未定乗数法（**Lagrange multiplier method**）という．

（証明） 条件 $g(x,y)=0$ より x と y は独立ではないから，陰関数 $y=\varphi(x), x=\psi(y)$ が存在する．このとき，関数 $f(x,y)$ は 1 変数関数

$$p(x)=f(x,\varphi(x)),\qquad q(y)=f(\psi(y),y)$$

とみなされる．ここで，関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をもつとする．このとき $p'(a)=0, q'(b)=0$ となるので，

$$p'(a)=\frac{d}{dx}f(x,\varphi(x))\Big|_{x=a,y=b}=f_x(a,b)+f_y(a,b)\varphi'(a)=0,$$
$$q'(b)=\frac{d}{dy}f(\psi(y),y)\Big|_{x=a,y=b}=f_x(a,b)\psi'(y)+f_y(a,b)=0$$

が成り立つ．また，

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)=-\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)}\quad（ただし，g_y\neq 0）,$$
$$\frac{dx}{dy}=\psi'(y)=-\frac{g_y(x,y)}{g_x(x,y)}\quad（ただし，g_x\neq 0）$$

を用いると 2 つの式は

$$(☆)\qquad f_x(a,b)g_y(a,b)-f_y(a,b)g_x(a,b)=0$$

と 1 つの式となる．この方程式を解くことで極値の候補 (a,b) が定まる．しかし，この方程式のままでは解くのが難しい．次のように式変形する．(☆) を変形して

$$\lambda=\frac{f_x(a,b)}{g_x(a,b)}=\frac{f_y(a,b)}{g_x(a,b)}$$

とおく．これを (☆) へ代入して

$$f_x(a,b)-\lambda g_x(a,b)=0,\qquad f_y(a,b)-\lambda g_y(a,b)=0$$

を得る．ここで λ も未知変数であると考えて，条件 $g(x,y)=0$ とあわせて，(a,b,λ) についての連立方程式とみなす．$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ とおけば，この 3 つの方程式は $F_x=0$, $F_y=0, F_\lambda=0$ と表される． □

例 2.161（条件付き極値） 条件 $g(x,y)=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-1=0$ のもとでの関数 $f(x,y)=x^2-y^2$ の極値を求める．まず，

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x^2-y^2-\lambda\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1\right)$$

とおく．このとき連立方程式

$$F_x=2x-\frac{2\lambda}{9}x=0,\quad F_y=-2y-\frac{2\lambda}{4}y=0,\quad F_\lambda=-g=-\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1\right)=0$$

を考える．これをまとめると

$$x(\lambda-9)=0,\quad y(\lambda+4)=0,\quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

となる．$x=0$ のとき第 3 式より $y=\pm2$ であり，第 2 式より $\lambda=-4$ となる．$y=0$ のとき第 3 式より $x=\pm3$ であり，第 1 式より $\lambda=9$ となる．$\lambda=9$ のとき第 2 式より $y=0$ であり，第 3 式より $x=\pm3$ となる．$\lambda=-4$ のとき第 1 式より $x=0$ であり，第 3 式より $y=\pm2$ となる．よって連立方程式の解は

$$(x,y,\lambda)=(0,\pm2,-4),(\pm3,0,9)$$

となる．極値の候補となる点は

$$(x,y)=(0,\pm2),(\pm3,0)$$

である．これらの点が極値であるか確認する．条件 $g(x,y)=0$ により定まる 2 つの陰関数をそれぞれ $y=\varphi(x), x=\psi(y)$ とおく．これらの導関数は

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)=-\frac{g_x}{g_y}=-\frac{4x}{9y}\quad(\text{ただし } y\neq0 \text{ のとき}),$$
$$\frac{dx}{dy}=\psi'(y)=-\frac{g_y}{g_x}=-\frac{9y}{4x}\quad(\text{ただし } x\neq0 \text{ のとき})$$

となる．また，合成関数 $p(x)=f(x,\varphi(x)), q(x)=f(\psi(y),y)$ の導関数はそれぞれ

$$\begin{aligned}p'(x)&=\frac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=f_x(x,y)\frac{dx}{dx}+f_y(x,y)\frac{dy}{dx}=f_x(x,y)+f_y(x,y)\varphi'(x)\\&=2x-2y\left(-\frac{4x}{9y}\right)=\frac{26}{9}x\quad(\text{ただし } y\neq0 \text{ のとき}),\\q'(y)&=\frac{d}{dy}f(\psi(y),y)=f_x(x,y)\frac{dx}{dy}+f_y(x,y)\frac{dy}{dy}=f_x(x,y)\psi'(y)+f_y(x,y)\\&=2x\left(-\frac{9y}{4x}\right)-2y=-\frac{13}{2}y\quad(\text{ただし } x\neq0 \text{ のとき})\end{aligned}$$

となる．さらに微分すると

$$p''(x)=\frac{d^2}{dx^2}f(x,\varphi(x))=\frac{d}{dx}\left(\frac{26}{9}x\right)=\frac{26}{9}>0\quad(\text{ただし } y\neq0 \text{ のとき}),$$
$$q''(y)=\frac{d^2}{dy^2}f(\psi(y),y)=\frac{d}{dy}\left(-\frac{13}{2}y\right)=-\frac{13}{2}<0\quad(\text{ただし } x\neq0 \text{ のとき})$$

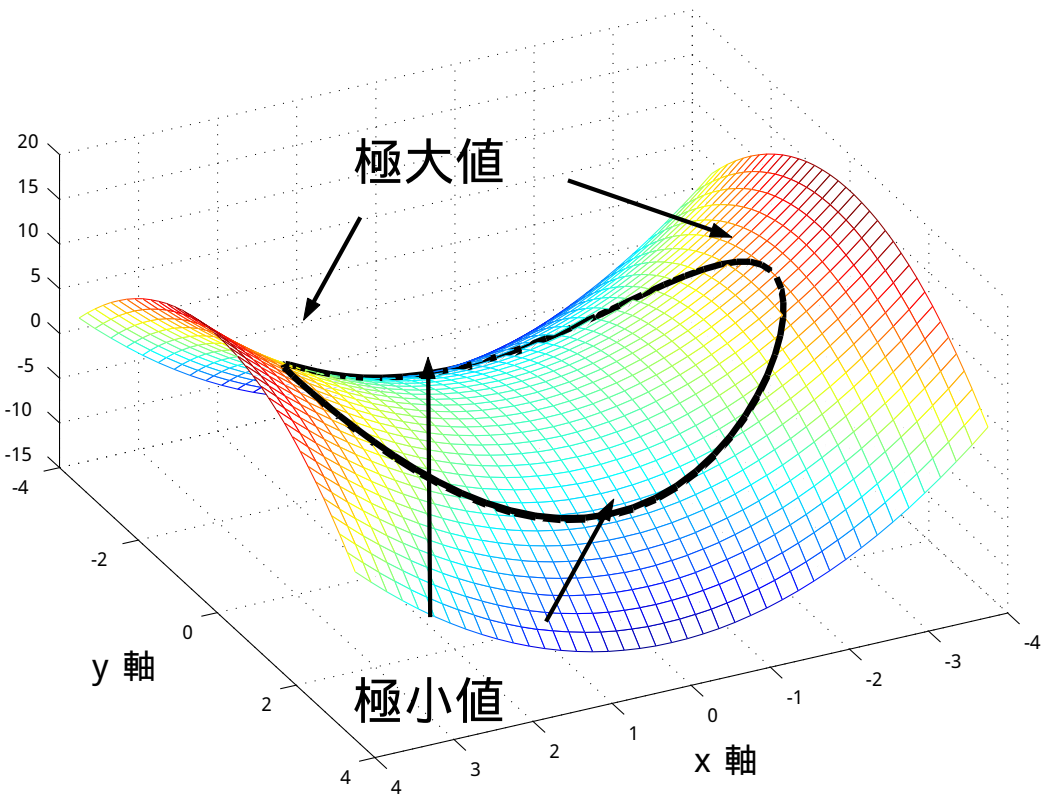
となる．よって，$(x, y) = (0, \pm 2)$ のとき，$x = 0$ となるから $p(x)$ を用いて

$$p'(0) = 0, \quad p''(0) = \frac{26}{9} > 0$$

となるので，$f(0, \pm 2) = -4$ は極小値である．また，$(x, y) = (\pm 3, 0)$ のとき，$y = 0$ となるから $q(x)$ を用いて

$$q'(0) = 0, \quad q''(0) = -\frac{13}{2} < 0$$

となるので，$f(\pm 3, 0) = 9$ は極大値である．



□

例 2.162（条件付き極値） 条件 $g(x,y)=x^2-\dfrac{y^2}{4}-1=0$ のもとでの関数 $f(x,y)=x^3+y$ の極値を求める．まず，

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x^3+y-\lambda\left(x^2-\frac{y^2}{4}-1\right)$$

とおく．このとき連立方程式

$$F_x=3x^2-2\lambda x=0,\quad F_y=1+\frac{2\lambda}{4}y=0,\quad F_\lambda=-g=-\left(x^2-\frac{y^2}{4}-1\right)=0$$

を考える．これをまとめると

$$x(3x-2\lambda)=0,\quad \lambda y+2=0,\quad x^2-\frac{y^2}{4}=1$$

となる．第 1 式より $x=0$ とする．このとき第 3 式より $y=\pm\sqrt{-4}$ となり実数解をもたないので不適である．第 1 式より $x=\dfrac{2\lambda}{3}$ とする．このとき，$\lambda\neq 0$ である．なぜなら，$\lambda=0$ とすると $x=0$ となるからである．よって第 2 式より $y=-\dfrac{2}{\lambda}$ である．

$$x=\frac{2\lambda}{3},\qquad y=-\frac{2}{\lambda}$$

を第 3 式に代入すると

$$(4\lambda^2+3)(\lambda^2-3)=0$$

となる．実数の範囲内の解は

$$\lambda=\pm\sqrt{3}$$

である．以上より，連立方程式の解は

$$(x,y,\lambda)=\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\mp\frac{2}{\sqrt{3}},\pm\sqrt{3}\right)\qquad\text{（複合同順）}$$

となる．極値の候補となる点は

$$(x,y)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

である．これらの点が極値であるか確認する．条件 $g(x,y)=0$ により定まる陰関数を $y=\varphi(x)$ とおく．この導関数は

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)=-\frac{g_x}{g_y}=\frac{4x}{y}\quad(\text{ただし } y\neq 0 \text{ のとき})$$

となる．また，合成関数 $p(x)=f(x,\varphi(x))$ の導関数は $y\neq 0$ のとき

$$p'(x)=\frac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=f_x(x,y)\frac{dx}{dx}+f_y(x,y)\frac{dy}{dx}=f_x(x,y)+f_y(x,y)\varphi'(x)=3x^2+\frac{4x}{y}$$

となる．さらに微分すると

$$p''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x, \varphi(x)) = \frac{d}{dx}\left(3x^2 + \frac{4x}{y}\right) = 6x + \frac{4}{y} - \frac{4x\varphi'}{y^2} = 6x + \frac{4}{y} - \frac{16x^2}{y^3}$$
$$= 6x - \frac{16}{y^3}\left(x^2 - \frac{y^2}{4}\right) = 6x - \frac{16}{y^3}$$

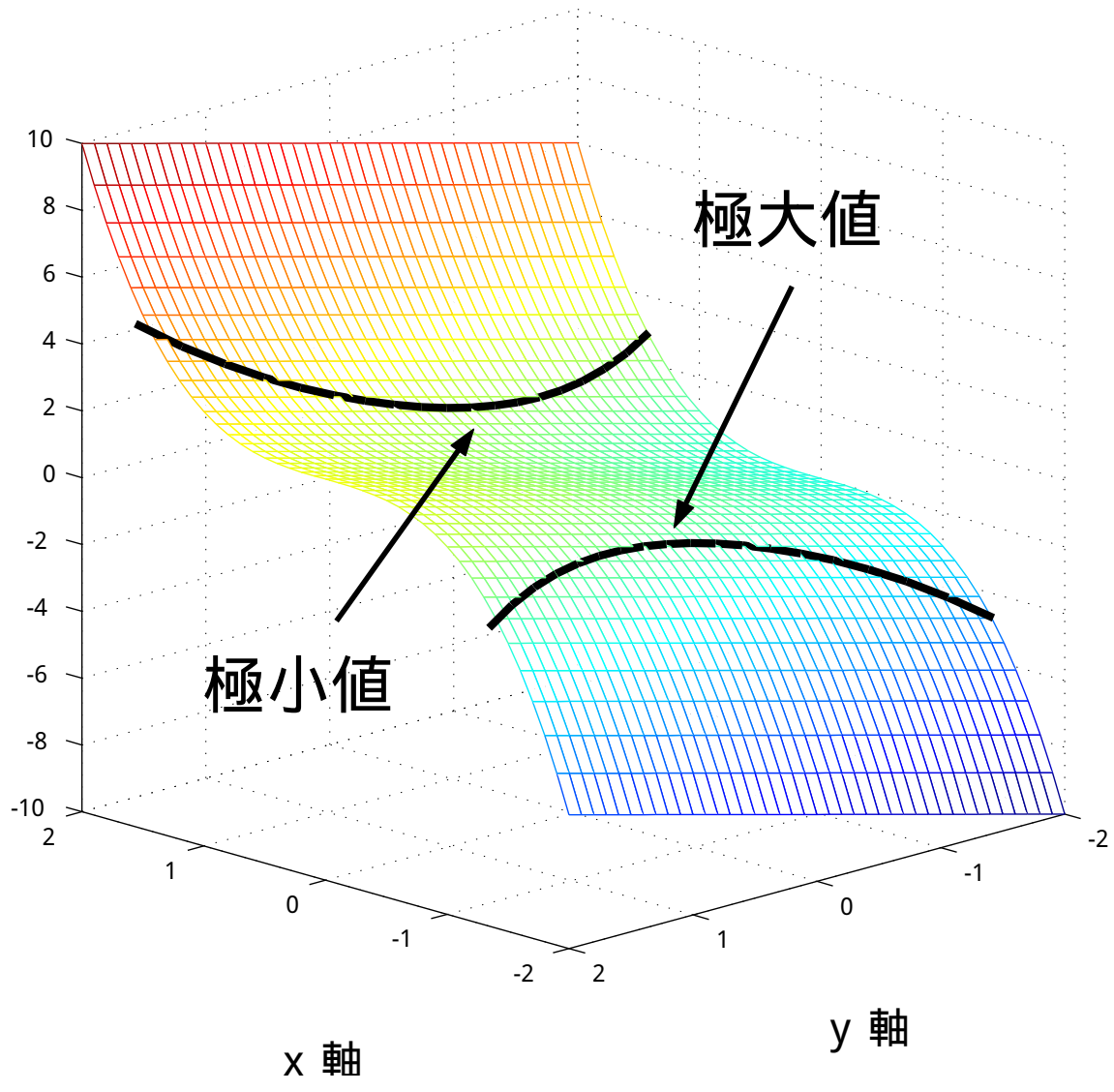
となる．よって，$(x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ のとき，

$$p'\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0, \qquad p''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 10\sqrt{3} > 0$$

となるので，$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ は極小値であり，$(x, y) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ のとき，

$$p'\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0, \qquad p''\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -10\sqrt{3} < 0$$

となるので，$f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ は極大値である．



□

例 2.163 （条件付き極値） 条件 $g(x,y)=x^2+y^2-a^2=0\,(a>0)$ のもとでの関数 $f(x,y)=2xy$ の極値を求める．まず，

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=2xy-\lambda(x^2+y^2-a^2)$$

とおく．このとき連立方程式

$$F_x=2y-2\lambda x=0,\quad F_y=2x-2\lambda y=0,\quad F_\lambda=-g=-(x^2+y^2-a^2)=0$$

を考える．これをまとめると

$$y-\lambda x=0,\quad x-\lambda y=0,\quad x^2+y^2=a^2$$

となる．第 1 式より $y=\lambda x$ を第 2 式に代入して

$$(1-\lambda^2)x=0$$

となる．$x=0$ のとき，第 1 式では $y=0$ となり，第 3 式では $y=\pm a$ となる．これは矛盾するので不適である．$\lambda=1$ のとき，$y=x$ であり第 3 式から $x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ となる．$\lambda=-1$ のとき，$y=-x$ であり第 3 式から $x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ となる．以上より，連立方程式の解は

$$(x,y,\lambda)=\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\pm\frac{a}{\sqrt{2}},1\right),\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\mp\frac{a}{\sqrt{2}},-1\right)\qquad\text{（複合同順）}$$

となる．極値の候補となる点は

$$(x,y)=\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

である．これらの点が極値であるか確認する．条件 $g(x,y)=0$ により定まる陰関数を $y=\varphi(x)$ とおく．この導関数は

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)=-\frac{g_x}{g_y}=-\frac{x}{y}\quad(\text{ただし } y\neq 0 \text{ のとき})$$

となる．また，合成関数 $p(x)=f(x,\varphi(x))$ の導関数は $y\neq 0$ のとき

$$p'(x)=\frac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=f_x(x,y)\frac{dx}{dx}+f_y(x,y)\frac{dy}{dx}=f_x(x,y)+f_y(x,y)\varphi'(x)=2y-\frac{2x^2}{y}$$

となる．さらに微分すると

$$p''(x)=\frac{d^2}{dx^2}f(x,\varphi(x))=\frac{d}{dx}\left(2y-\frac{2x^2}{y}\right)=2\varphi'-\frac{4x}{y}+\frac{2x^2\varphi'}{y^2}=-\frac{6x}{y}-\frac{2x^3}{y^3}$$

となる．よって，$(x,y)=\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ のとき，

$$p'\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=0,\qquad p''\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=-8<0$$

となるので，$f\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=a^2$ は極大値である．$(x,y)=\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\mp\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ のとき，

$$p'\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=0,\qquad p''\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=8>0$$

となるので，$f\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\mp\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=-a^2$ は極小値である．

□

3 多重積分

§ 3.1 多重積分

注意 3.1 （定積分） 1 変数関数 $f(x)$ を考える．区間 $[a,b]$ を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$$

と N 個に分割し，各小区間の幅を $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ とおく．このとき，各小区間の矩形の符合付き面積は $\Delta S_n = f(\xi_n)\Delta x_n$ $(x_{n-1} < \xi_n < x_n)$ であるから，曲線 $y = f(x)$ と区間 $[a,b]$ における符合付きの面積は

$$S = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \Delta S_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n)\Delta x_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

で与えられ，これが $f(x)$ の定積分である．また，定積分においては区間についても向きがあることに注意する．

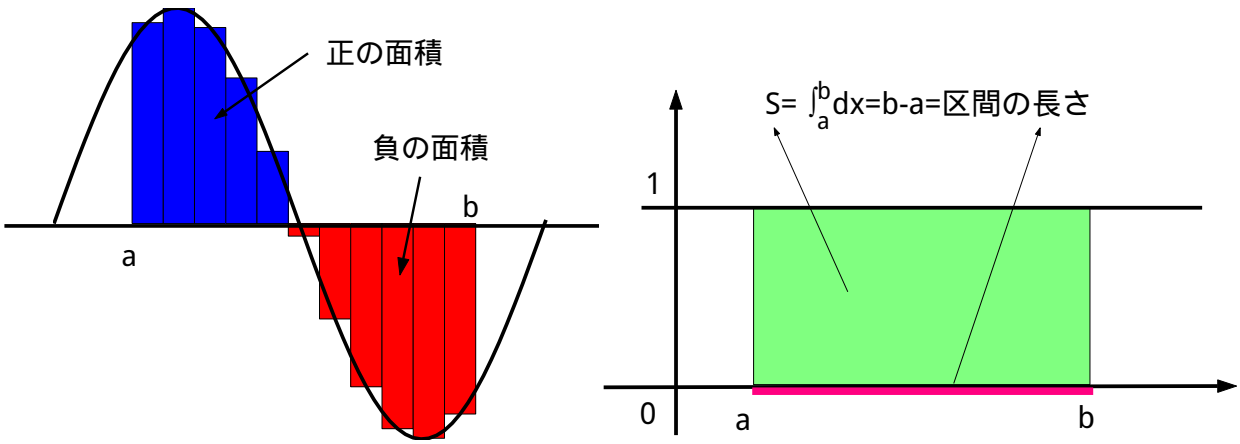
□

注意 3.2 （定積分と区間の長さ） 被積分関数が $f(x) = 1$ のとき，定積分

$$\int_a^b dx = \Big[x\Big]_a^b = b - a$$

は区間 $I = [a,b]$ の長さを表す．

□



定義 3.3（**2** 重積分） 長方形領域

$$D = \{\, (x,y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d \,\}$$

を x 軸方向に N 分割し，y 軸方向に M 分割し，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b, \qquad c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{M-1} < y_M = d$$

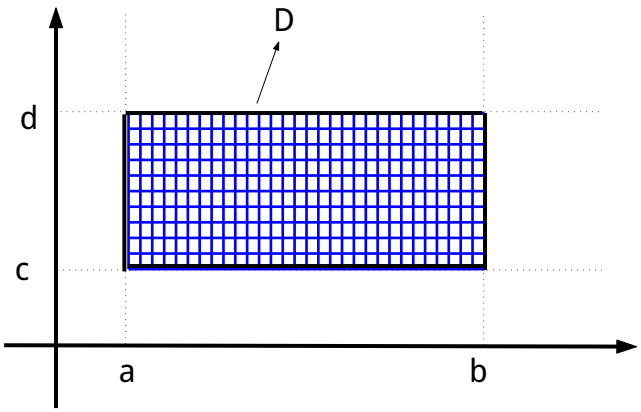
とする．各小領域

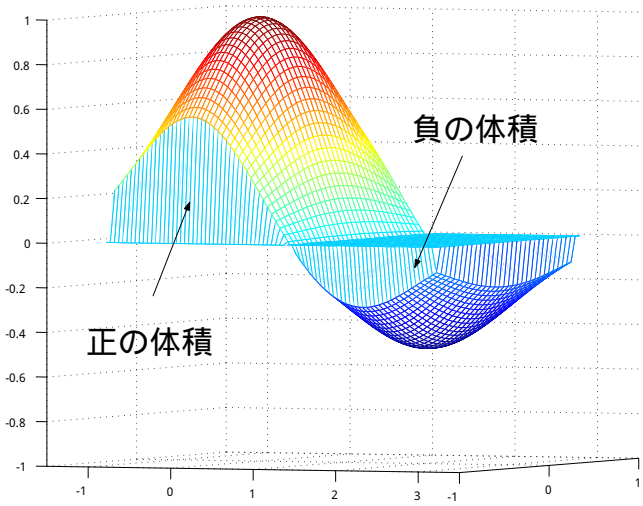
$$D_{n,m} = \{\, (x,y) \mid x_{n-1} < x < x_n, y_{m-1} < y < y_m \,\}$$

の x 方向，y 方向の幅を $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$, $\Delta y_m = y_m - y_{m-1}$ とおくと，小領域 $D_{n,m}$ の面積は $\Delta S_{n,m} = \Delta x_n \Delta y_n$ であり，曲面 $z = f(x,y)$ と $D_{n,m}$ ではさまれた領域の体積は $\Delta V_{n,m} = f(\xi_n, \eta_m)\Delta S_{n,m} = f(\xi_n, \eta_m)\Delta x_n \Delta y_m$ である．ただし，$x_{n-1} < \xi_n < x_n$, $y_{m-1} < \eta_m < y_m$ とする．よって，曲面 $z = f(x,y)$ と領域 D とではさまれた領域の符合付き体積は

$$\begin{aligned} V &= \lim_{N,M\to\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \Delta V_{n,m} \\ &= \lim_{N,M\to\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} f(\xi_n,\eta_m)\Delta x_n \Delta y_m = \iint_D f(x,y)\,dxdy \\ &= \lim_{N,M\to\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} f(\xi_n,\eta_m)\Delta S_{n,m} = \iint_D f(x,y)\,dS \end{aligned}$$

で与えられる．これを 2 変数関数 $f(x,y)$ に対する **2** 重積分または面積分という．





□

注意 3.4（領域の面積の向き） 定積分では積分区間に向きを導入し，$\int_a^b dx = -\int_b^a dx$ となるが，多重積分では，微小領域の面積 $\Delta S_{n,m}$ は正のみである．例えば a と b とを入れ替えて $\Delta S_{n,m} < 0$ となることは許されない．

□

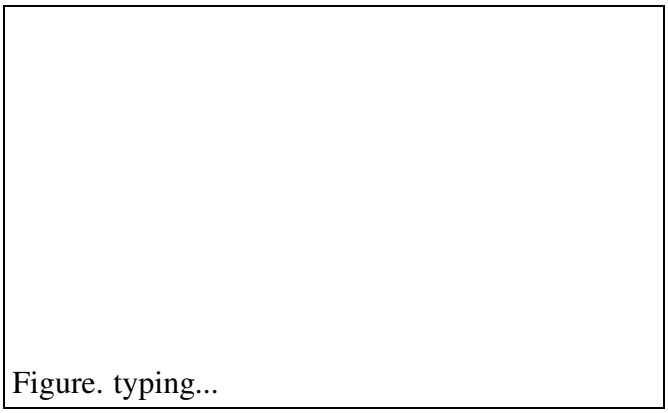
定義 3.5 （**2** 重積分） 任意の領域 D に対する 2 重積分は，領域 D を含む長方形領域 $\tilde{D}$ を考え，関数

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

を導入し，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(x,y)\,dxdy$$

と定義する．

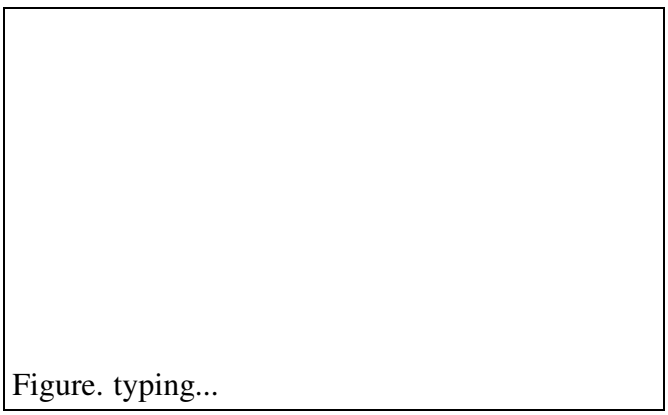


□

注意 3.6 （多重積分と領域の面積） 被積分関数が $f(x,y) = 1$ のとき，

$$S = \iint_D dxdy$$

は領域 D の面積となる．



□

定義 3.7 （**3** 重積分） 3 変数関数 $f(x,y,z)$ に対する **3** 重積分は

$$\tilde{V} = \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{N,M,L\to\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{L} f(\xi_n,\eta_m,\lambda_l)\Delta x_n \Delta y_m \Delta z_l$$
$$= \iiint_D f(x,y,z)\,dV = \lim_{N,M,L\to\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{L} f(\xi_n,\eta_m,\lambda_l) V_{n,m,l}$$

と定義される．

□

注意 3.8 （多重積分と領域の面積） $\tilde{V}$ は **4** 次元の符合付き体積を表す，
また，被積分関数が $f(x,y,z)=1$ のとき，

$$V = \iint_D dxdydy$$

は領域 D の体積を表す．

□

定義 3.9 （n 重積分） 同様にして定義される n 変数関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ に対する $\boldsymbol{n}$ 重積分は

$$\tilde{V}_{n+1} = \iint\cdots\int_D f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n$$

と表記する．

□

注意 3.10 （多重積分と領域の面積） $\tilde{V}_{n+1}$ は $\boldsymbol{n+1}$ 次元の符合付き体積を表す，
また，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$ のとき，

$$V_n = \iint\cdots\int_D dx_1dx_2\cdots dx_n$$

は領域 D の $\boldsymbol{n}$ 次元の体積を表す．

□

定義 3.11 （多重積分） 2 重積分，3 重積分，$\cdots$ のことを総称して，多重積分または重積分という．

□

§ 3.2 累次積分

定義 3.12 （簡単な領域） 領域 D が

$$D = \{\, (x,y) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \,\}$$

と表されるとき，D を x に関して簡単な領域という．

$$D = \{\, (x,y) \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \,\}$$

と表されるとき，D を y に関して簡単な領域という． □

定理 3.13 （累次積分） 領域 D が x に関して単純なとき，多重積分は定積分

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx$$

により与えられる．領域 D が y に関して単純なとき，多重積分は定積分

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy$$

により与えられる．これらの積分を累次積分という． □

注意 3.14 （累次積分） 累次積分は省略して次のように表記する：

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\, f(x,y),$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx\, f(x,y).$$

□

Figure. typing...

x に関して単純な領域

Figure. typing...

y に関して単純な領域

§ 3.3 2 重積分の計算

例 3.15 （x, y 両方に単純な領域における多重積分） 領域 D を下図のような三角形の領域とする．このとき多重積分

$$I = \iint_D dxdy$$

を求める．被積分関数は 1 であるから，領域 D の面積を $S = \frac{1}{2}$ とすると，$I = 1 \times S = S = \frac{1}{2}$ となる．

領域 D を x に関して単純な領域として表すと

$$D = \{\, (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\, 1 \leq y \leq x \,\}$$

となる．このとき累次積分で計算すると

$$I = \iint_D dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x dy = \int_0^1 \left\{ \Big[y \Big]_0^x \right\} dx = \int_0^1 (x - 0) dx = \int_0^1 x\, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}$$

と得られる．

領域 D を y に関して単純な領域として表すと

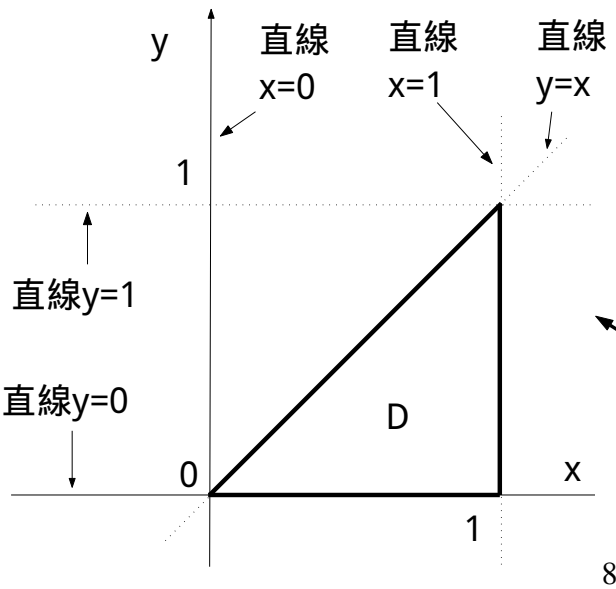
$$D = \{\, (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1,\, y \leq x \leq 1 \,\}$$

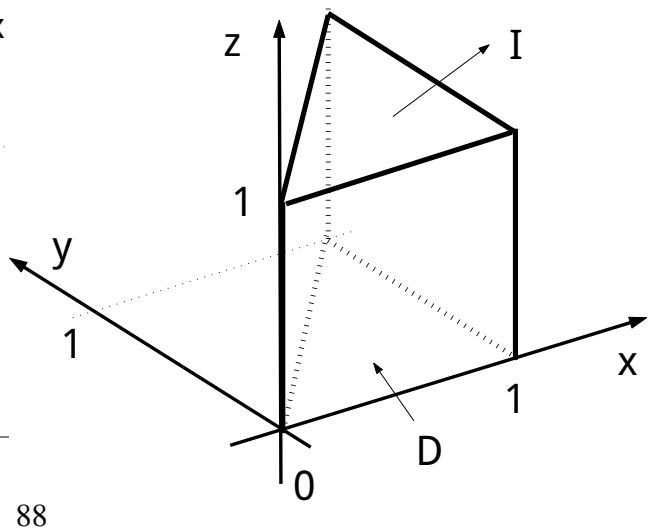
となる．このとき累次積分で計算すると

$$I = \iint_D dxdy = \int_0^1 dy \int_y^1 dy = \int_0^1 \left\{ \Big[x \Big]_y^1 \right\} dy = \int_0^1 (1 - y)\, dy = \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

と得られる． □

注意 3.16 （x, y 両方に単純な領域における多重積分） x, y の両方に関して単純な領域であれば，とちらの領域で計算しても結果は同じ． □





例 3.17 （累次積分） 多重積分

$$I = \iint_D (x^2 + y^2 + 1)\, dxdy, \quad D = \{\, (x, y) \mid 0 \le x \le 1,\, x \le y \le 2x \,\}$$

を求める．D は x に関して単純な領域だから，累次積分を用いて計算して，

$$I = \int_0^1 dx \int_x^{2x} (x^2 + y^2 + 1) dy = \int_0^1 \left\{ \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right]_{y=x}^{y=2x} \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ \left(2x^3 + \frac{8x^3}{3} + 2x \right) - \left(x^3 + \frac{x^3}{3} + x \right) \right\} dx = \int_0^1 \left(\frac{10x^3}{3} + x \right) dx = \left[\frac{5x^4}{6} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{3}$$

と得られる．

□

問 3.18 （累次積分） 領域 D を 2 つの y に関して単純な領域

$$D_1 = \left\{ (x, y) \mid 0 \le y \le 1,\, \frac{y}{2} \le x \le y \right\}, \quad D_2 = \left\{ (x, y) \mid 1 \le y \le 2,\, \frac{y}{2} \le x \le 1 \right\}$$

に $D = D_1 + D_2$ と分ける．このとき，

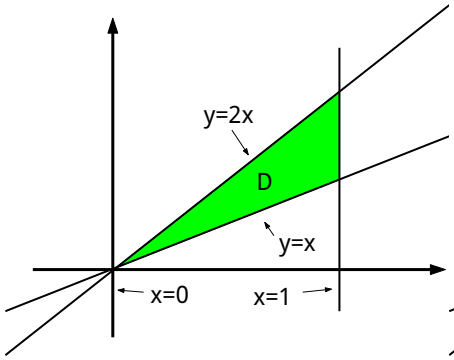
$$\iint_D (x^2 + y^2 + 1) dxdy = \iint_{D_1} (x^2 + y^2 + 1) dxdy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 + 1) dxdy$$

を計算せよ．

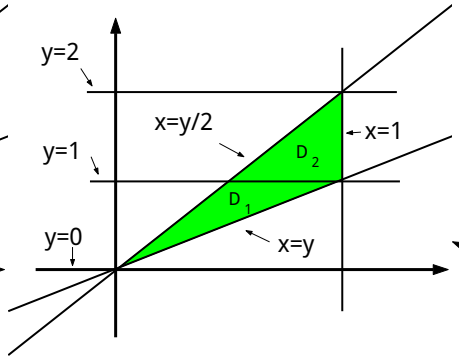
□

問 3.19 （領域の面積） 領域 D の面積 $S = \iint_D dxdy$ を求めよ．

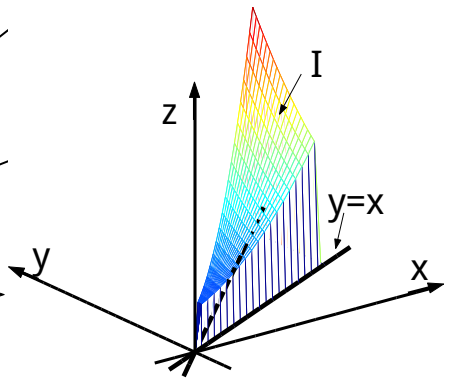
□



(a) x に関して単純な領域



(b) y に関して単純な領域



(c) I

例 3.20 （累次積分） 多重積分

$$\iint_D \frac{x}{y} dxdy, \quad D = \{ (x,y) \mid 1 \le y \le 2, 0 \le x \le y^2 \}$$

を求める．D は y に関して単純な領域だから，累次積分を用いて計算して，

$$I = \int_1^2 dy \int_0^{y^2} \frac{x}{y} dx = \int_1^2 \left\{ \left[\frac{x^2}{2y} \right]_{x=0}^{x=y^2} \right\} dy = \int_1^2 \frac{y^3}{2} dy = \left[\frac{y^4}{8} \right]_{y=1}^{y=2} = \frac{15}{8}$$

と得られる． □

問 3.21 （累次積分） 領域 D を 2 つの x に関して単純な領域

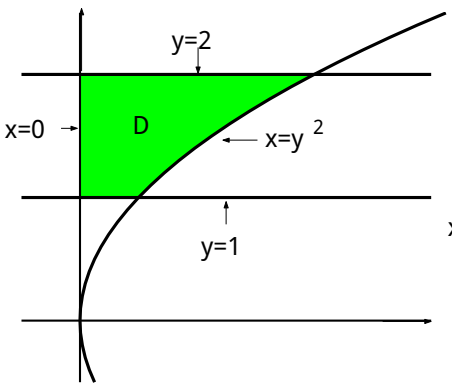
$$D_1 = \{ (x,y) \mid 0 \le x \le 1, \ 1 \le y \le 2 \}, \quad D_2 = \{ (x,y) \mid 1 \le x \le 4, \ \sqrt{x} \le y \le 2 \}$$

に $D = D_1 + D_2$ と分ける．このとき，

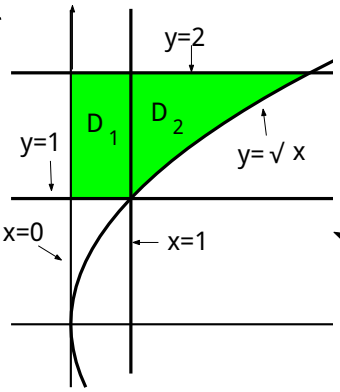
$$\iint_D (x^2 + y^2 + 1) dxdy = \iint_{D_1} (x^2 + y^2 + 1) dxdy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 + 1) dxdy$$

を計算せよ． □

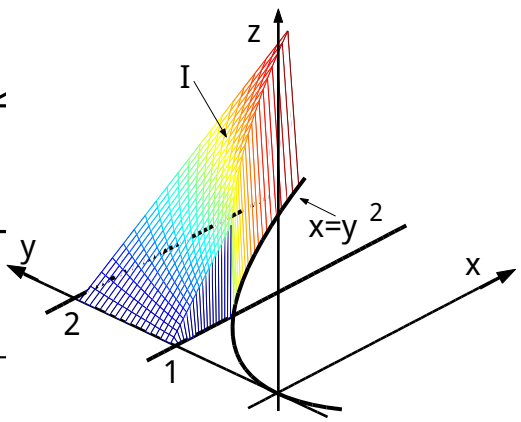
問 3.22 （領域の面積） 領域 D の面積 $S = \iint_D dxdy$ を求めよ． □



(a) y に関して単純な領域



(b) x に関して単純な領域



(c) I

例 3.23 （累次積分） 多重積分

$$I = \iint_D x^2 y \, dxdy, \quad D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, \, y \geq 0 \right\}$$

を求める．領域 D は半円の内部の領域であり，

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \right\}$$

と書き直すと，x に関して単純な領域とする．累次積分を用いて計算して，

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y \, dy = \int_0^1 dx \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{x^2(1 - x^2)}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right]_{x=0}^{x=1}$$
$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$$

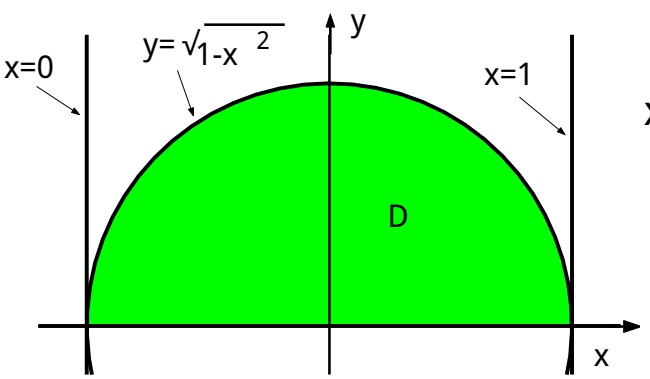
と得られる． □

問 3.24 （累次積分） 領域 D を y に関して単純な領域として書けば

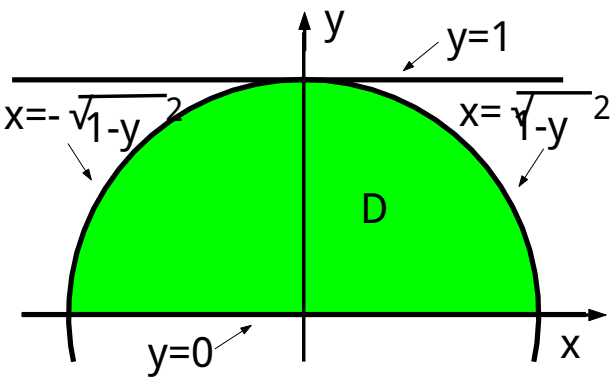
$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \, -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \right\}$$

と書ける．このとき $I = \iint_D x^2 y \, dxdy$ を求めよ． □

問 3.25 （領域の面積） 領域 D の面積 $S = \iint_D dxdy$ を求めよ． □



(a) x に関して単純な領域



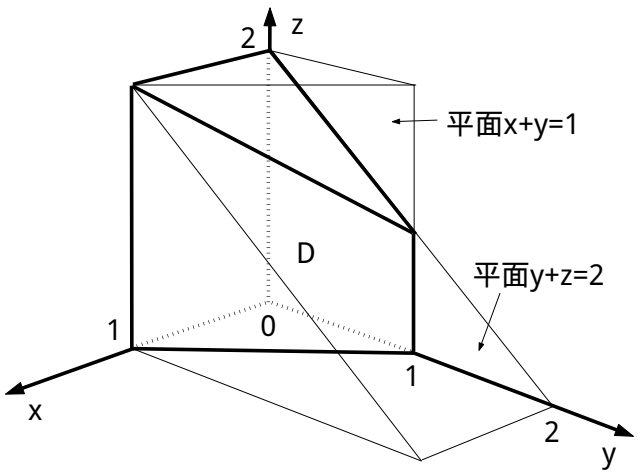
(b) y に関して単純な領域

§ 3.4 3 重積分の計算

例 3.26 （累次積分） 3 重積分

$$I = \iiint_D xyz\,dxdydz, \quad D = \{\,(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1-x,\, 0 \le z \le 2-y\,\}$$

を求める．領域 D は 平面 $x=0, y=0, z=0, x+y=1, z+y=2$ で囲まれてできる領域である．



領域 D は y は x に関して単純であり，z は x, y に関して単純な領域であるから，累次積分を用いて計算して，

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{2-y} dz\, xyz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{1}{2}xyz^2\right]_{z=0}^{z=2-y} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, \frac{1}{2}xy(2-y)^2 \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, \frac{1}{2}x(y^3-4y^2+4y) = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2}x\left(\frac{y^4}{4}-\frac{4y^3}{3}+\frac{4y^2}{2}\right)\right]_{y=0}^{y=1-x} \\
&= \int_0^1 dx \frac{1}{2}x\left(\frac{(1-x)^4}{4}-\frac{4(1-x)^3}{3}+\frac{4(1-x)^2}{2}\right) = \int_0^1 dx \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{4}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^3}{2}-x^2+\frac{x}{12}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x^6}{24}+\frac{x^5}{15}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{24}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{13}{240}
\end{aligned}$$

と得られる． □

問 3.27 （領域の面積） 領域 D の体積 $V = \iiint_D dxdydz$ を求めよ． □

例 3.28 （累次積分） 3 重積分

$$I = \iiint_D z\,dxdydz, \quad D = \{\,(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le x+1,\, 0 \le z \le x+y\,\}$$

を求める．領域 D は 平面 $x=0, x=1, y=0, z=0, -x+y=1, x+y-z=0$ で囲まれてできる領域である．また，領域 D は y は x に関して単純であり，z は x, y に関して単純な領域であるから，累次積分を用いて計算して，

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{x+1} dy \int_0^{x+y} z\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{x+1} dy \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=x+y} = \int_0^1 dx \int_0^{x+1} dy \frac{(x+y)^2}{2}$$
$$= \int_0^1 dx \left[\frac{(x+y)^3}{6}\right]_{y=0}^{y=x+1} = \int_0^1 dx \left(\frac{(2x+1)^3}{6} - \frac{x^3}{6}\right) = \left[\frac{(2x+1)^4}{48} - \frac{x^4}{24}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{3}$$

と得られる． □

問 3.29 （領域の面積） 領域 D を図示し，領域 D の体積 $V = \iiint_D dxdydz$ を求めよ． □

例 3.30 （累次積分） 3 重積分

$$I = \iiint_D x\,dxdydz, \quad D = \left\{\,(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\,\right\}$$

を求める．領域 D は原点を中心とする半径 a の球の内部で x, y, z が正の領域である．領域 D は

$$D = \left\{\,(x,y) \mid 0 \le y \le a,\ 0 \le x \le a,\ 0 \le z \le \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\right\}$$

と書き直すと，z は x, y に関して単純であるから，累次積分を用いて計算して，

$$I = \int_0^a dy \int_0^a x\,dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz = \int_0^a dy \int_0^a x\,dx \left[z\right]_{z=0}^{z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$
$$= \int_0^a dy \int_0^a x\sqrt{a^2-x^2-y^2}dx = \int_0^a dy \left[\frac{-1}{3}\left(\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^3\right]_0^a = \frac{1}{3}\int_0^a \left(\sqrt{a^2-y^2}\right)^3 dy$$

となる．$y = a\cos\theta$ と置換積分すると

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\right)^3 \cos\theta\,d\theta = \frac{a^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta$$

であり，さらに

$$\cos^4\theta = \cos^2\theta(1-\sin^2\theta) = \cos^2\theta - (\sin\theta\cos\theta)^2 = \cos^2\theta - \frac{\sin^2 2\theta}{4}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4\theta}{2}\right) = \frac{3}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 4\theta}{8}$$

を用いると

$$I = \frac{a^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 4\theta}{8}\right) d\theta = \frac{a^4}{3}\left[\frac{3}{8}\theta + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\sin 4\theta}{32}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}a^4$$

と求まる． □

§ 3.5 積分の順番の入れ替え

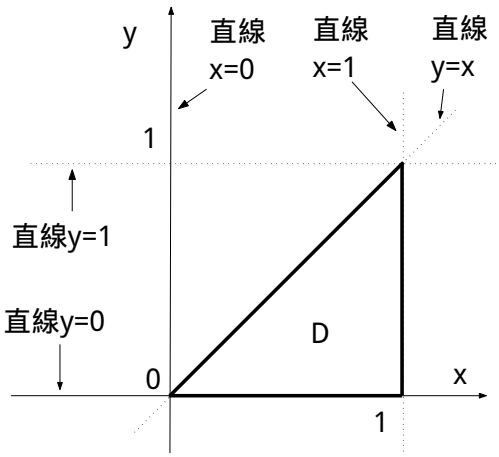
例 3.31 （積分の順番の入れ替え） 領域 D は x と y の両方に関して単純な領域であり，

$$D = \{\,(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\,\}, \quad D = \{\,(x,y) \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y\,\}$$

で与えられるとする．このとき，多重積分は

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x dy\, f(x,y) = \int_0^1 dy \int_y^1 dx\, f(x,y)$$

と書ける．



□

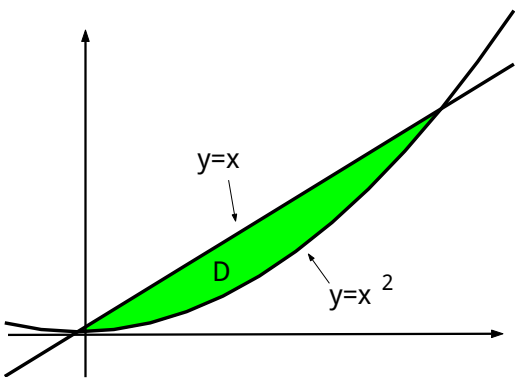
例 3.32 （積分の順番の入れ替え） 領域 D が x と y の両方に関して単純な領域であり，

$$D = \{\,(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\,\}, \quad D = \{\,(x,y) \mid 0 \le y \le 1,\ y \le x \le \sqrt{y}\,\}$$

で与えられるとする．このとき，多重積分は

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy\, f(x,y) = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} dx\, f(x,y)$$

と書ける．



□

例 3.33 （積分の順番の入れ替え） 領域

$$D = \{\, (x,y) \mid 0 \le y \le 4,\ y-2 \le x \le \sqrt{y} \,\}$$

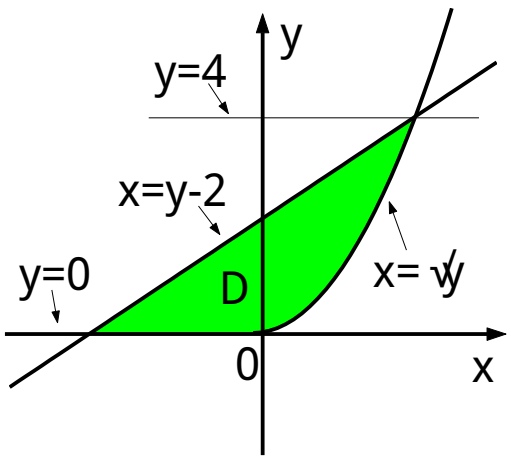
は y に関して単純な領域である．x に関して単純な領域に書き換えると

$$\begin{aligned} D &= D_1 + D_2, \\ D_1 &= \{\, (x,y) \mid -2 \le x \le 0,\ 0 \le y \le x+2 \,\}, \\ D_2 &= \left\{\, (x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le x+2 \,\right\} \end{aligned}$$

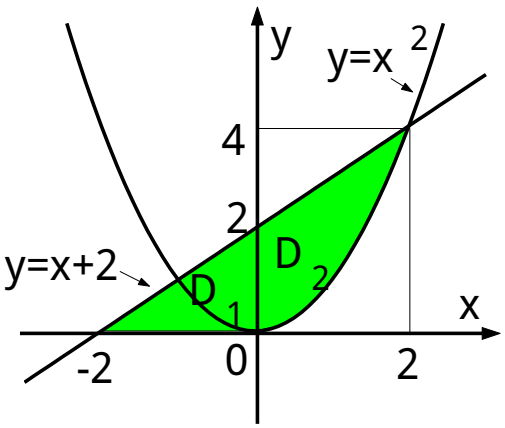
となる．このとき

$$\int_0^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx = \int_{-2}^0 dx \int_0^{x+2} f(x,y)\,dy + \int_0^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy$$

が成り立つ．



(a) y に関して単純な領域



(b) x に関して単純な領域

□

§ 3.6 長方形領域における積分

定理 3.34 （長方形領域における多重積分） 領域 D が長方形領域

$$D = \{\, (x, y) \mid a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d \,\}$$

のとき，

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx$$

が成り立つ．

□

注意 3.35 （長方形領域における多重積分） 長方形領域であれば x と y の積分の順が交換可能である．

□

例 3.36 （長方形領域における多重積分） 多重積分

$$I = \iint_D (x + y)\, dxdy, \quad D = \{\, (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\, 1 \leq y \leq 2 \,\}$$

を求める．y, x の順で積分すると

$$I = \int_0^1 dx \int_1^2 (x + y) dy = \int_0^1 dx \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = \int_0^1 dx \left(x + \frac{3}{2} \right) = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = 2$$

となる．逆に x, y の順で積分すると

$$I = \int_1^2 dy \int_0^1 (x + y) dx = \int_1^2 dy \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=0}^{x=1} = \int_1^2 \left(\frac{1}{2} + y \right) dy = \left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = 2$$

となる．積分の順を入れ替えても結果は同じである．

□

問 3.37 （長方形領域における多重積分） 多重積分

$$I = \iint_D (2x - y) dxdy, \quad D = \{\, (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1,\, 1 \leq x \leq 2 \,\}$$

を求めよ．

□

定理 3.38 （長方形領域における多重積分） 領域 D が長方形領域

$$D = \{\, (x, y) \mid a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d \,\}$$

であり，被積分関数が変数分離型 $f(x)g(y)$ のとき，

$$\iint_D f(x)g(y)\, dxdy = \int_a^b f(x)\, dx \int_c^d g(y)\, dy = \left(\int_a^b f(x)\, dx \right) \left(\int_c^d g(y)\, dy \right)$$

が成り立つ．

□

例 3.39 （長方形領域における多重積分） 多重積分

$$I = \iint_D xy\, dxdy, \quad D = \{\, (x, y) \mid 1 \leq x \leq 2,\, 3 \leq y \leq 4 \,\}$$

を求める．長方形領域で被積分関数は変数分離型であるから，

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 x\, dx \int_3^4 y\, dy = \left(\int_1^2 x\, dx \right) \left(\int_3^4 y\, dy \right) = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=1}^{x=2} \times \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=3}^{y=4} \\ &= \frac{4-1}{2} \times \frac{16-9}{2} = \frac{21}{4} \end{aligned}$$

となる．

□

§ 3.7 多重積分の置換積分

注意 3.40 （定積分の置換積分） 定積分において積分変数を $x = \phi(t)$ と置き換えると

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\frac{dx}{dt}dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$$

となる．ただし，$\alpha = \phi^{-1}(a), \beta = \phi^{-1}(b)$ である． □

定理 3.41 （多重積分の置換積分） 多重積分

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

において積分変数を $x = \phi(u,v), y = \psi(u,v)$ と置き換える．このとき，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(\phi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,dudv$$

となる．ただし，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ はヤコビアン

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}\phi_u(u,v) & \psi_u(u,v)\\ \phi_v(u,v) & \psi_v(u,v)\end{vmatrix}$$

であり，E は (u,v) の領域

$$E = \{\,(u,v) \mid x = \phi(u,v), y = \psi(u,v), \forall(u,v) \in D\,\}$$

である．

（証明） xy 座標の点 $(x,y), (x+\Delta x, y+\Delta y)$ は標準基底 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ を用いて，

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y, \quad \begin{bmatrix}x+\Delta x\\y+\Delta y\end{bmatrix} = (x+\Delta x)\boldsymbol{e}_x + (y+\Delta y)\boldsymbol{e}_y, \quad \boldsymbol{e}_x = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_y = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

と表される．uv 座標に座標変換すると，

$$x = \phi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad x+\Delta x = \phi(u+\Delta u, v+\Delta v), \quad y+\Delta y = \psi(u+\Delta u, v+\Delta v)$$

とおける．このとき，$\Delta x, \Delta y$ は十分小さいとすると，$\Delta u, \Delta v$ も十分小さいので，テイラー展開して

$$\begin{aligned} x+\Delta x &= \phi(u,v) + \phi_u(u,v)\Delta u + \phi_v(u,v)\Delta v + \cdots,\\ y+\Delta y &= \psi(u,v) + \psi_u(u,v)\Delta u + \psi_v(u,v)\Delta v + \cdots \end{aligned}$$

と書ける．$x=\phi(u,v), y=\psi(u,v)$ であることに注意すると

$$\Delta x\boldsymbol{e}_x+\Delta y\boldsymbol{e}_y=\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}=\Delta u\begin{bmatrix}\phi_u(u,v)\\ \psi_u(u,v)\end{bmatrix}+\Delta v\begin{bmatrix}\phi_v(u,v)\\ \psi_v(u,v)\end{bmatrix}+\cdots=\Delta u\boldsymbol{e}_u+\Delta v\boldsymbol{e}_v+\cdots$$

が成り立つ．ここで，ベクトル

$$\boldsymbol{e}_u=\begin{bmatrix}\phi_u(u,v)\\ \psi_u(u,v)\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{e}_v=\begin{bmatrix}\phi_v(u,v)\\ \psi_v(u,v)\end{bmatrix}$$

は点 (u,v) における uv 座標の基底となる．

頂点が $A(x,y), B(x+\Delta x,y), C(x,y+\Delta y), D(x+\Delta x,y+\Delta y)$ からなる長方形の微小領域の面積は $\Delta S=\Delta x\Delta y$ である．一方，uv 座標において頂点が $A'(u,v), B'(u+\Delta u,v), C'(u,v+\Delta v), D'(u+\Delta u,v+\Delta v)$ からなる領域は平行四辺形である．平行四辺形 $A'B'C'D'$ の面積は，$\overrightarrow{A'B'}=\Delta u\boldsymbol{e}_u$, $\overrightarrow{A'C'}=\Delta v\boldsymbol{e}_v$ より，

$$\Delta S=\mathrm{abs}\left(\det\begin{bmatrix}\Delta u\boldsymbol{e}_u & \Delta v\boldsymbol{e}_v\end{bmatrix}\right)=\mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix}\Delta u\phi_u & \Delta v\phi_v\\ \Delta u\psi_u & \Delta v\psi_v\end{vmatrix}\right)=\mathrm{abs}\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\Delta u\Delta v$$

となる．極限 $\Delta x,\Delta y\to 0$ においてもこれが成り立つので，

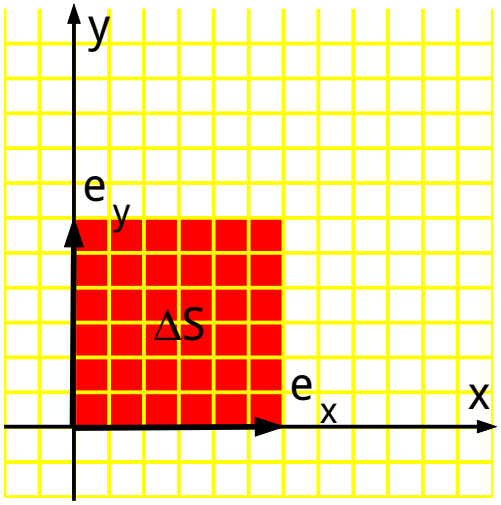
$$dS=dxdy=\mathrm{abs}\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)dudv$$

を得る．

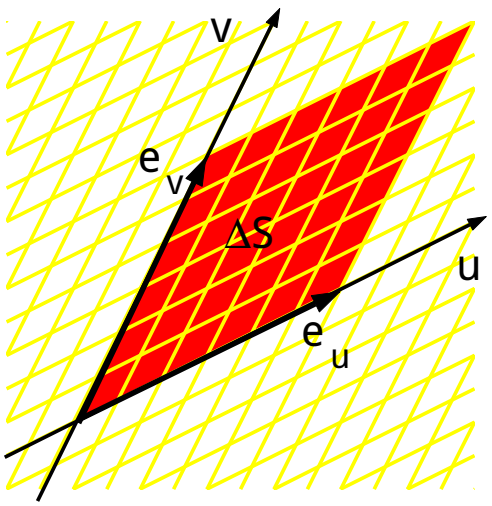
□

注意 3.42（置換積分） 1 変数関数の定積分では $dx=\phi'(t)dt$ に絶対値はつかない．これは積分区間 $[a,b]$ に向きを考えているためである．例えば，$a>b$ のとき定積分の値の符合は反転される．多重積分では，$dxdy=|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv$ に絶対値がつく．これは面積要素に向きを考えないためである．

□



(a) xy 座標



(b) uv 座標

§ 3.8 斜交座標への置換積分

例 3.43 （多重積分の変数変換） 多重積分

$$\iint_D (x-y)^2\,dxdy, \qquad D=\{\,(x,y)\mid |x+2y|\le 1,\ |x-y|\le 1\,\}$$

を求める．積分変数を

$$u=x+2y, \qquad v=x-y$$

とおく．この逆は

$$x=\frac{u+2v}{3}, \qquad y=\frac{u-v}{3}$$

である．このとき領域 D を (u,v) で表すと

$$E=\{\,(u,v)\mid |u|\le 1,\ |v|\le 1\,\}$$

となる．座標変換 $(x,y)\mapsto(u,v)$ のヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}$$

である．これらより，

$$\iint_D (x-y)^2\,dxdy=\iint_E\left(\frac{u+2v}{3}-\frac{u-v}{3}\right)^2\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,dudv=\iint_E v^2\left|\frac{-1}{3}\right|\,dudv$$
$$=\frac{1}{3}\iint_E v^2\,dudv=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}v^2\,dv\int_{-1}^{1}du=\frac{1}{3}\left(\int_{-1}^{1}v^2\,dv\right)\left(\int_{-1}^{1}du\right)=\frac{4}{3}\left(\int_{0}^{1}v^2\,dv\right)\left(\int_{0}^{1}du\right)$$
$$=\frac{4}{3}\left[\frac{v^3}{3}\right]_0^1\times\Big[u\Big]_0^1=\frac{4}{9}$$

を得る． □

注意 3.44 （面素） 置換積分により面素は $dS=dxdy=\frac{1}{3}dudv$ と変換される．直交座標 xy では微小面積は，辺の長さが dx, dy の長方形の面積 $dS=dxdy$ である．これに対して斜交座標 uv の微小面積は，辺の長さが du, dv の平行四辺形の面積 $dS=\frac{1}{3}dudv$ である．これを示す．uv 座標の基底は

$$\boldsymbol{e}_u=\begin{bmatrix}x_u\\ y_u\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_v=\begin{bmatrix}x_v\\ y_v\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$$

であり，点 $O, A(\boldsymbol{e}_u), B(\boldsymbol{e}_v), C(\boldsymbol{e}_u+\boldsymbol{e}_v)$ からなる平行四辺形の面積は

$$S_0=\mathrm{abs}\left(\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_u & \boldsymbol{e}_v\end{bmatrix}\right)=\mathrm{abs}\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)=\mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3}\end{vmatrix}\right)=\mathrm{abs}\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

である．ここで $\mathrm{abs}(x) = |x|$ とおいた．面素 $dudv$ は辺の長さが du, dv で平行四辺形 $OABC$ と相似な図形であるから，面素 $dudv$ の面積 dS は

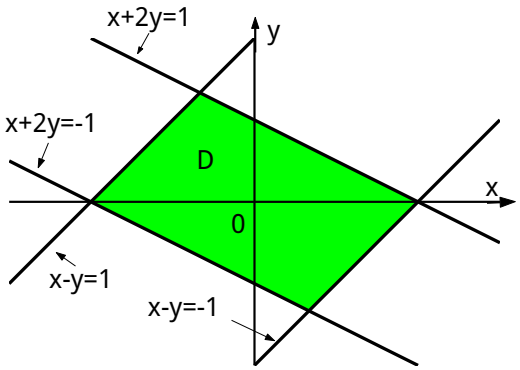
$$dS = S_0\, dudv = \frac{1}{3}\, dudv$$

と得られる．

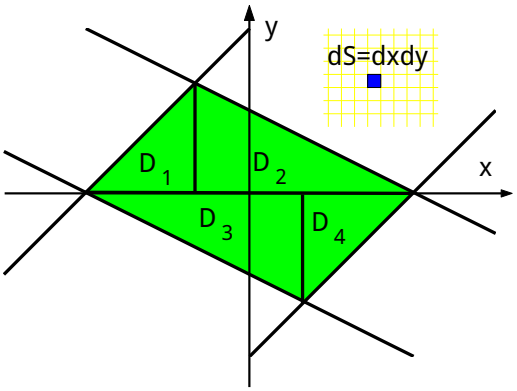
□

問 3.45 （多重積分の変数変換） 領域 D を下図 (b) のように 4 つに分割し多重積分を求めよ．

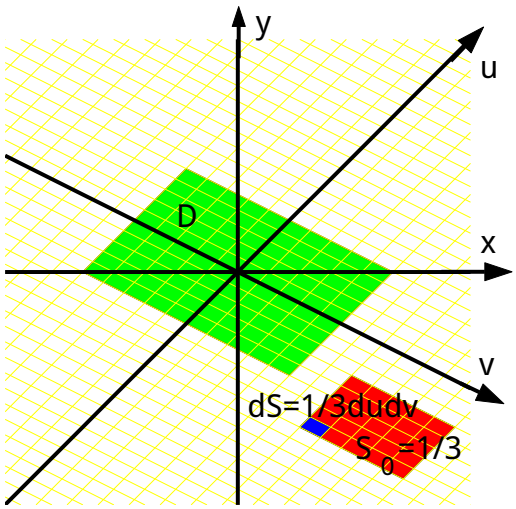
□



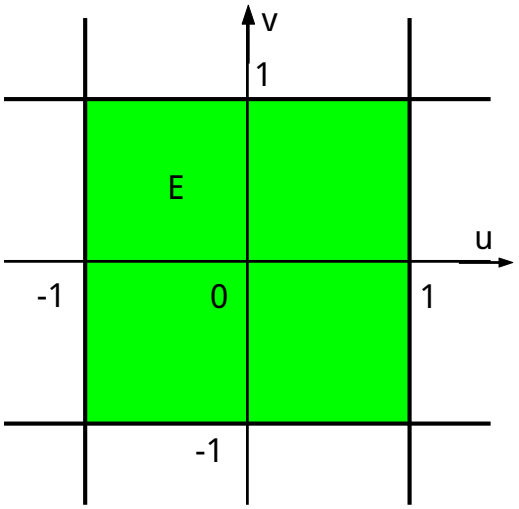
(a) 領域 D



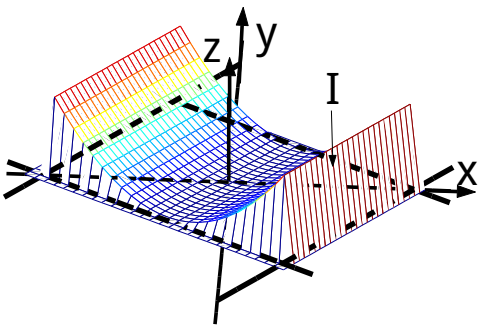
(b) 領域 D の分割



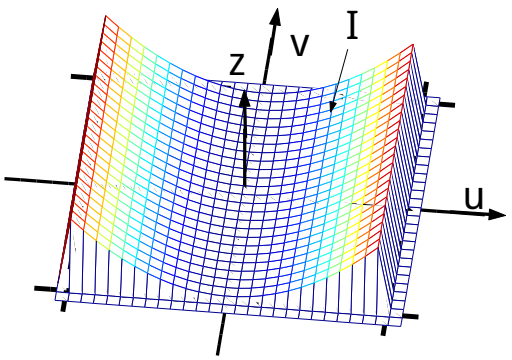
(c) uv 座標



(d) 領域 E



(e) xy 座標での I



(f) uv 座標での I

§ 3.9 極座標への置換積分

例 3.46 （多重積分の変数変換） 多重積分

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy, \qquad D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \right\} \quad (a > 0)$$

を求める．積分変数を

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

とおく．このとき極座標への座標変換のヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

であり，領域 D を (r, θ) で表すと，

$$E = \{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$$

となる．これらより，

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy = \iint_E ((r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| drd\theta = \iint_E r^3\, drd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3\, dr = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^a r^3\, dr \right) = \Big[\theta \Big]_0^{2\pi} \times \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\pi a^4}{2}$$

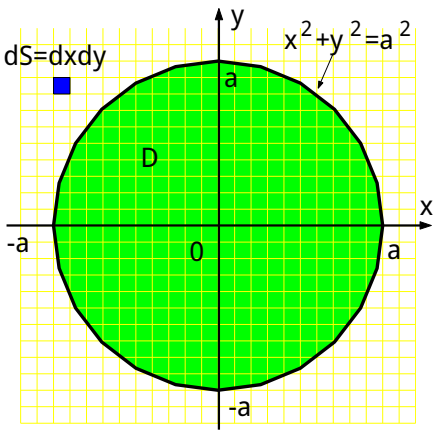
を得る． □

注意 3.47 （極座標の面素） 直交座標 xy から極座標 $r\theta$ への変換で，面素は $dS = dxdy = rdrd\theta$ と変換される．xy 座標では辺の長さが dx と dy の長方形の面積であり，$r\theta$ 座標では辺の長さが dr と $rd\theta$（半径 r，角 $d\theta$ の円弧の長さ）の長方形の面積となる． □

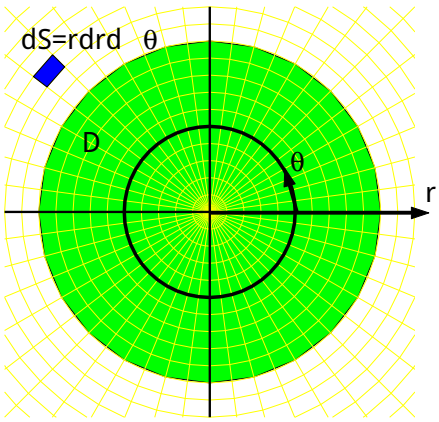
問 3.48 （多重積分の変数変換） 領域 D を x に関して単純な領域とみなし，多重積分を

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, (x^2 + y^2)$$

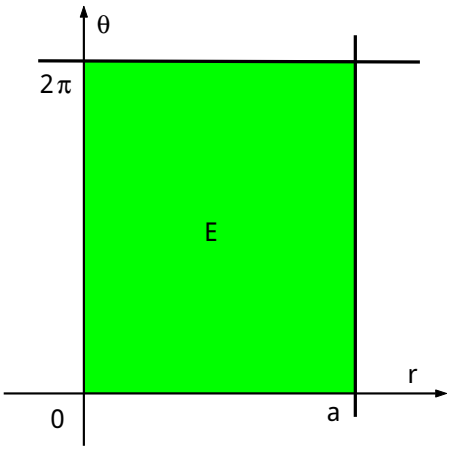
により求めよ． □



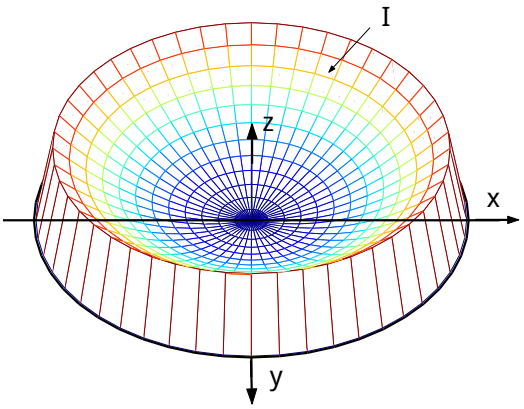
(a) 領域 D



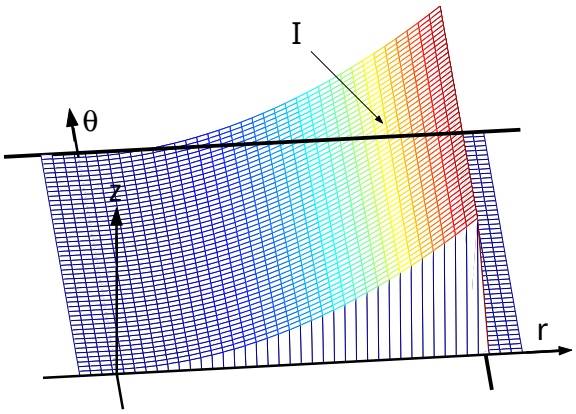
(b) $r\theta$ 座標



(c) 領域 E



(d) xy 座標での I



(e) $r\theta$ 座標での I

§ 3.10 3 次元極座標への置換積分

例 3.49 (多重積分の変数変換) 多重積分

$$I = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz, \qquad D = \left\{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le a^2 \right\} \quad (a>0)$$

を求める．積分変数を

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

とおく．このとき極座標への座標変換のヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

であるから，体積素は

$$dxdydz = r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$

と表される．領域 D を (r,θ,φ) で表すと，

$$E = \{ (r,\theta,\varphi) \mid 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \pi\ , 0 \le \varphi \le 2\pi \}$$

となる．これらより，

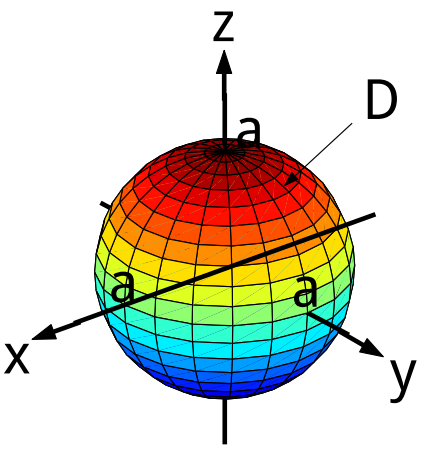
$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \iiint_E ((r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2 + (r\cos\theta)^2) r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$
$$= \iiint_E r^4\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^a r^4\,dr = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^a r^4\,dr\right)$$
$$= \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} \times \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} \times \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a = \frac{4\pi a^5}{5}$$

を得る． □

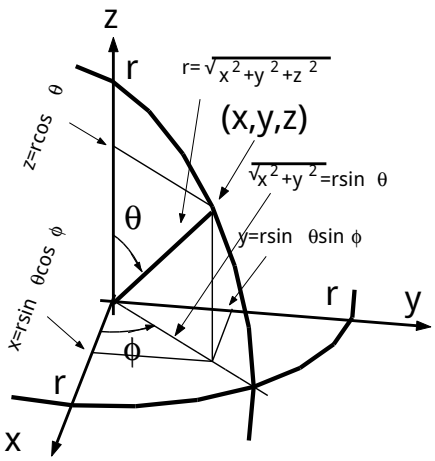
問 3.50 (多重積分の変数変換) I を次の累次積分を計算して求めよ．

$$I = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a dy \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz\,(x^2+y^2+z^2)$$

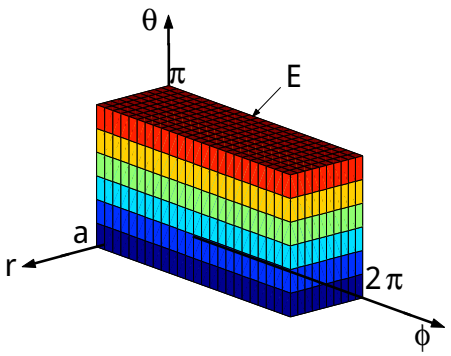
□



(a) 領域 D



(b) 極座標



(c) 領域 E

例 3.51 （累次積分） 3 重積分

$$I = \iiint_D x\,dxdydz, \quad D = \left\{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \right\}$$

を求める．3 次元の極座標に置き換えると領域 D は

$$E = \left\{ (r,\theta,\varphi) \;\middle|\; 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\ , 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right\}$$

となる．積分は

$$\begin{aligned} I &= \iiint_E (r\sin\theta\cos\varphi) r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi = \int_0^a r^3\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi \\ &= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \times \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \left[\sin\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}a^4 \end{aligned}$$

と求まる．

□

§ 3.11 体積の計算

例 3.52 （球の体積） 半径 a の球の体積は $V = 4\pi a^3/3$ である．これを多重積分で求める．

（その **1**） 球を 8 等分し底面が

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \ x \geq 0, \ y \geq 0 \right\}$$

であり，上面が

$$z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

の体積

$$V = 8 \iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

として求める．2 次元の極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと，領域 D と等価な領域は

$$E = \left\{ (r, \theta) \ \middle| \ 0 \leq r \leq a, \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

であり，面積素は $dxdy = rdrd\theta$ となるので，

$$V = 8 \iint_E \sqrt{a^2 - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta} r dr d\theta = 8 \int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$
$$= 8 \left[\frac{2}{3(-2)} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a \times \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8a^3}{3} \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3} a^3$$

と得られる．

（その **2**） 球を 8 等分し，領域

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0 \right\}$$

の体積

$$V = 8 \iiint_D dxdydz$$

として求める．3 次元の極座標 $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$ とおくと，領域 D と等価な領域は

$$E = \left\{ (r, \theta, \varphi) \ \middle| \ 0 \leq r \leq a, \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

であり，体積素は

$$dxdydz = r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi$$

となるので，

$$V = 8 \iiint_E r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi = 8 \int_0^a r^2\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 8 \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a \times \left[-\cos\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \left[\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 8 \times \frac{a^3}{3} \times 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi a^3}{3}$$

と得られる． □

例 3.53（円柱の体積） 底面の半径 a，高さ h の円柱の体積は $V = \pi a^2 h$ である．これを多重積分で求める．

（その **1**） 円柱の底面が xy 平面にあるとし，

$$D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \}$$

とおく．円柱の上面は平面 $z = f(x, y) = h$ である．円柱の体積は

$$V = \iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_D h\, dxdy = h \iint_D dxdy = h \iint_E r\, drd\theta = h \int_0^a r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= h \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^a \times \left[\theta \right]_0^{2\pi} = \pi a^2 h$$

と求まる．ただし，

$$E = \{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$$

とする．

（その **2**） 円柱の領域は

$$D = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2,\ 0 \leq z \leq h \}$$

と表される．この領域を円筒座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ で置き換えると，(r, θ, z) の領域は

$$E = \{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq h \}$$

であり，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} x_r & y_r & z_r \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_z & y_z & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

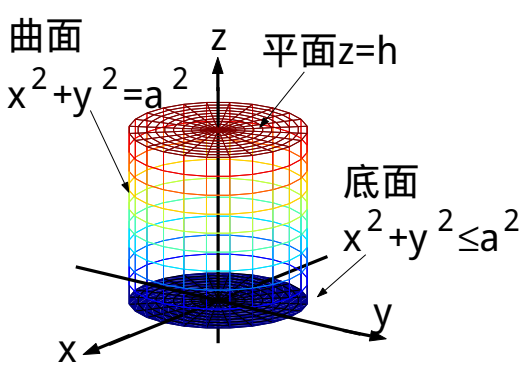
であるので，

$$dxdydz = rdrd\theta dz$$

が成り立つ．円柱の体積は

$$V = \iiint_D dxdyz = \iiint_E rdrd\theta dz = \int_0^a r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^a \times \left[\theta \right]_0^{2\pi} \times \left[z \right]_0^h = \pi a^2 h$$

と求まる． □



例 3.54 （円錐の体積） 底面の半径 a，高さ h の円錐の体積は $V = \frac{1}{3}\pi a^2 h$ である．これを多重積分で求める．円錐の底面は xy 平面にあるとし，その領域を

$$D = \{\, (x,y) \mid x^2 + y^2 \le a^2 \,\}$$

とおく．z 軸と点 (x,y,z) との距離を $r = \sqrt{x^2+y^2}$ とおくと，円錐の斜面では図 (b) より，

$$\frac{z}{h} + \frac{r}{a} = 1$$

が成り立つ．よって，斜面は

$$z = f(x,y) = h - \frac{h\sqrt{x^2+y^2}}{a}$$

と表される．よって円錐の体積は

$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy = h\iint_D \left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right) dxdy = h\iint_E \left(1 - \frac{r}{a}\right) r\,drd\theta$$
$$= h\int_0^a \left(r - \frac{r^2}{a}\right) dr \int_0^{2\pi} d\theta = h\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3a}\right]_0^a \times \Big[\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\pi a^2 h$$

と求まる．ただし，極座標変換を用いて

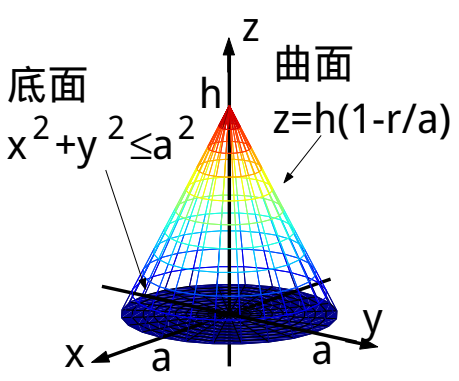
$$E = \{\, (r,\theta) \mid 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi \,\}$$

とした． □

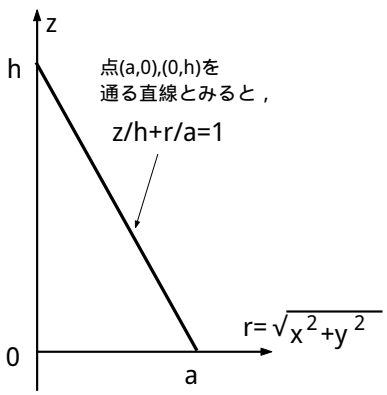
問 3.55 （円錐の体積） 円錐の体積を

$$V = \iiint_D dxdydz, \qquad D = \left\{\, (x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le a^2,\ 0 \le z \le h\left(1 - \frac{r}{a}\right) \right\}$$

により求めよ． □



(a) 円錐



(b) $z = f(x,y)$

例 3.56 （体積の計算） 半球

$$S = \{\, (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ z \ge 0 \,\}$$

と無限にのびる円柱

$$C = \{\, (x,y,z) \mid x^2+y^2 \le ax \,\}$$

の共通部分 $A = S \cap C$ の体積 V を求める．領域 A は

$$A = \{\, (x,y,z) \mid z \ge 0,\ x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ x^2+y^2 \le ax \,\}$$

と表される．領域 A は底面の領域を

$$D = \{\, (x,y) \mid x^2+y^2 \le ax \,\}$$

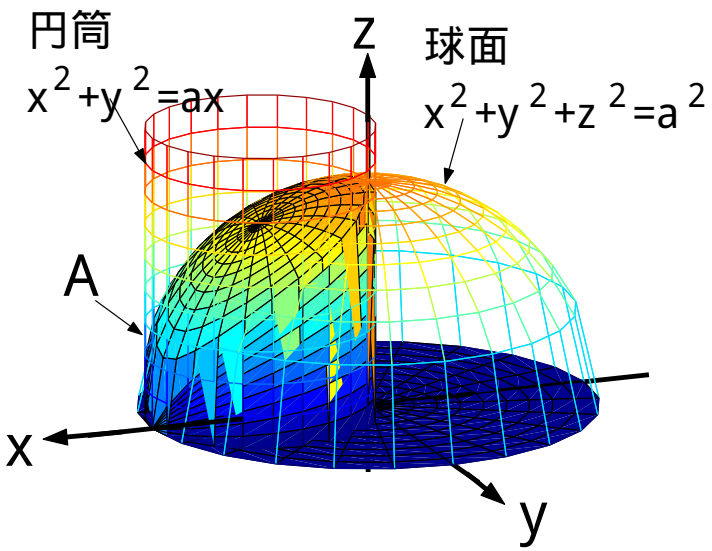
とする曲面 $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ の体積であるから，A の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_E r\sqrt{a^2-r^2}\,drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,dr \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[\frac{-1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a\cos\theta} = \frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-|\sin\theta|^3)\,d\theta = \frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3\theta)\,d\theta \\ &= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\theta+\sin\theta\cos^2\theta)\,d\theta = \frac{2a^3}{3}\left[\theta+\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}\right)a^3 \end{aligned}$$

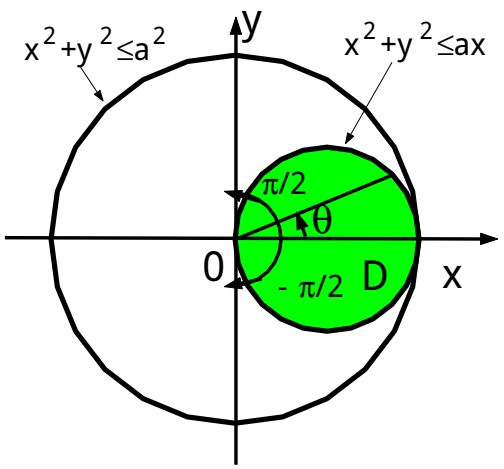
と求まる．ここで 2 次元の極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を用いた．領域は E は領域 D と等価な領域で

$$E = \left\{\, (r,\theta) \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le a\cos\theta \,\right\}$$

である． □



(a) $A = S \cap C$



(b) 領域 D

例 3.57 （体積の計算） 球

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2 \right\}$$

と円柱

$$C = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \right\}$$

の共通部分 $S \cap C$ を球 S から取り除いた領域 $A = S - S \cap C$ の体積 V を求める．領域 A を 8 等分して体積を

$$V = 8 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy, \qquad D = \left\{ (x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$$

により求める．2 次元の極座標変換をすると底面の領域 D は

$$E = \left\{ (x, y) \;\middle|\; a \leq r \leq 2a,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

であり，体積は

$$\begin{aligned} V &= 8 \iint_E r\sqrt{4a^2 - r^2}\, drd\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{2a} r\sqrt{4a^2 - r^2}\, dr \\ &= 8 \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \left[\frac{-1}{3}(4a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_a^{2a} = 8\frac{\pi}{2}\frac{(\sqrt{3}a)^3}{3} = 4\sqrt{3}\pi a^3 \end{aligned}$$

と求まる． □

問 3.58 （体積の計算） 2 つの円柱

$$C_1 = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + z^2 \leq a^2 \right\}, \qquad C_2 = \left\{ (x, y, z) \mid y^2 + z^2 \leq a^2 \right\}$$

の共通部分 $A = C_1 \cap C_2$ の体積 V を求めよ． □

§ 3.12 曲面積

定理 3.59 （曲面積） 関数 $z = f(x, y)$ による曲面

$$B = \{\, (x, y, z) \mid z = f(x, y),\ (x, y) \in D \,\}$$

の曲面積は

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}\, dxdy$$

で与えられる．

□

例 3.60 （球面の表面積） 半径 a の球面は

$$B = \left\{\, (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \,\right\}$$

である．表面積 S は 8 等分して

$$\begin{aligned} &S = 8 \iint_D \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dxdy, \\ &z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ &D = \left\{\, (x, y) \mid x^2 + y^2 \le a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \,\right\} \end{aligned}$$

により求まる．z は $x^2 + y^2 = a^2$ により定まる陰関数であるから，

$$z_x = -\frac{x}{z}, \quad z_y = -\frac{y}{z}$$

となる．被積分関数は

$$\sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} = \frac{a}{z} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

であらから，表面積は

$$\begin{aligned} S &= 8a \iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy = 8a \iint_E \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} drd\theta = 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \\ &= 8a \left[\, \theta \,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \left[\, -\sqrt{a^2 - r^2} \,\right]_0^a = 4\pi a^2 \end{aligned}$$

と得られる．

□

例 3.61 （曲面積） 曲面

$$B = \left\{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x^2+y^2 \le ax,\ z \ge 0 \right\} \quad (a>0)$$

の曲面積

$$S = \iint_D \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\, dxdy, \quad z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}, \quad D = \left\{ (x,y) \mid x^2+y^2 \le ax \right\}$$

を求める．z は $x^2+y^2+z^2=a^2$ により定まる陰関数であるから，

$$z_x = -\frac{x}{z}, \qquad z_y = -\frac{y}{z}$$

となり，

$$\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

を得る．これを用いると曲面積は

$$\begin{aligned} S &= a\iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy = a\iint_E \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}drd\theta = a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr \\ &= a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[-\sqrt{a^2-r^2} \right]_{r=0}^{r=a\cos\theta} = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-|\sin\theta|)\, d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\theta)\, d\theta \\ &= 2a^2 \left[\theta+\cos\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\pi-2)a^2 \end{aligned}$$

と求まる． □

問 3.62 （曲面積） 次の曲面 B の曲面積 S を求めよ．ただし $a>0$ とする．

(1) $B = \left\{ (x,y,z) \mid x+y+z = a,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \right\}$

(2) $B = \left\{ (x,y,z) \mid z = xy,\ x^2+y^2 \le a^2 \right\}$

(3) $B = \left\{ (x,y,z) \mid z = \tan^{-1}\dfrac{y}{z},\ x^2+y^2 \le a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \right\}$

(4) $B = \left\{ (x,y,z) \mid y^2+z^2 = a^2,\ x^2+y^2 \le a^2 \right\}$

(5) $B = \left\{ (x,y,z) \mid y^2+z^2 = a^2,\ x^2+y^2+z^2 \le 2a^2 \right\}$

(6) $B = \left\{ (x,y,z) \mid z = x^2+y^2,\ z \le a \right\}$

□

§ 3.13 多重積分の広義積分への応用

例 3.63 (多重積分の広義積分への応用)　広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

を求める．関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ を誤差関数またはガウシアン (**Gaussian**) といい，正規分布関数に用いられる．

まず，円の内部の領域 D と正方形の領域 $\tilde{D}$ を

$$D(a) = \left\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 \le a \right\}, \quad \tilde{D}(a) = \{ (x,y) \mid -a \le x \le a,\ -a \le y \le a \}$$

とおき，多重積分

$$I = \iint_{D(a)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy, \qquad \tilde{I} = \iint_{\tilde{D}(a)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

を考える．I を計算すると

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D(a)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \iint_{E(a)} e^{-(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)} r\,dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r e^{-r^2} dr \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^a r e^{-r^2} dr \right) = \Big[\theta \Big]_0^{2\pi} \times \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^a = \pi(1 - e^{-a^2}) \end{aligned}$$

となる．ここで，

$$E(a) = \{ (r,\theta) \mid 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi \}$$

である．$\tilde{I}$ を計算すると

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= \iint_{\tilde{D}(a)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx \int_{-a}^{a} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-a}^{a} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx \right)^2 \end{aligned}$$

となる．

次に，領域 $D(a), \tilde{D}(a), D(\sqrt{2}a)$ を考える．これらは下図 (b) のように包含関係

$$D(a) \subset \tilde{D}(a) \subset D(\sqrt{2}a)$$

があり，領域の面積には

$$S(D(a)) < S(\tilde{D}(a)) < S(D(\sqrt{2}a))$$

と大小関係がある．同じ正の関数に対する異なる領域での多重積分は，領域の面積が大きい方が多重積分の値は大きくなる．よって，

$$\iint_{D(a)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy < \iint_{\tilde{D}(a)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy < \iint_{D(\sqrt{2}a)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

が成り立つ．これは先ほどの計算結果より

$$\pi(1-e^{-a^2}) < \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2 < \pi(1-e^{-2a^2})$$

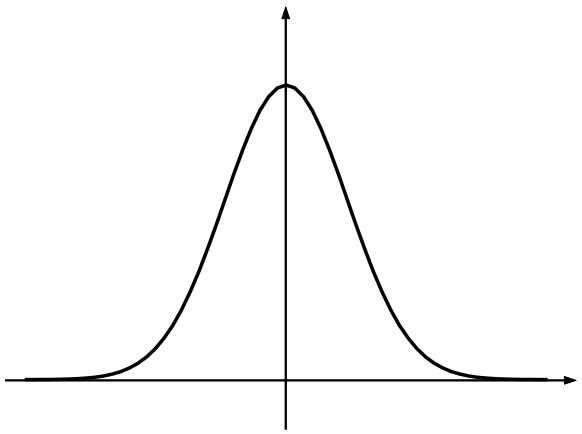
となる．$a \to \infty$ の極限をとるとはさみうちの定理より，

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi$$

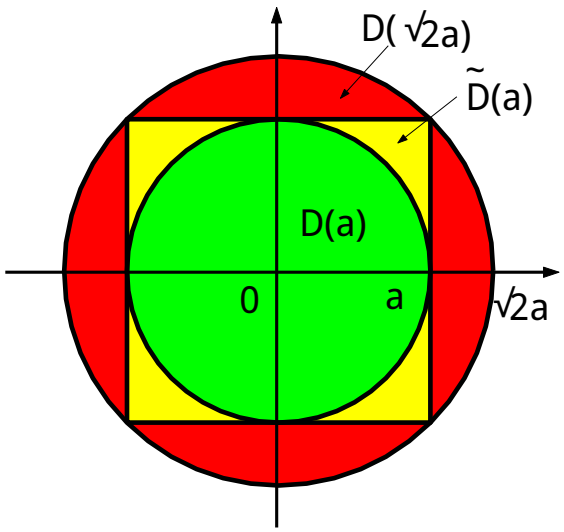
を得る．よって，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

が成り立つ． □



(a) e^{-x^2}



(b) 領域 $D(a)$, $\tilde{D}(a)$, $D(\sqrt{2}a)$

§ 3.14 有向曲線

定義 3.64 （有向曲線） 向き付きの曲線

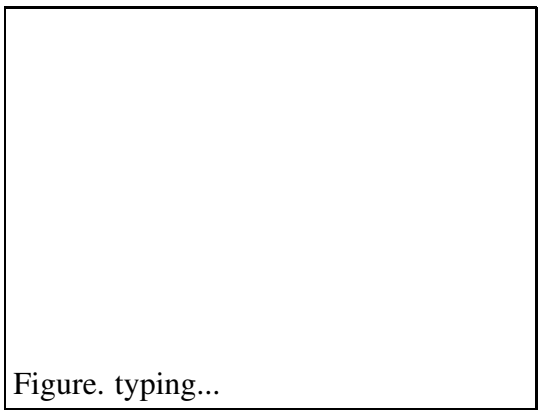
$$C = \{\, (x, y) \mid x = \varphi(t), y = \psi(t),\ t : a \to b \,\}$$

を有向曲線（**oriented curve**）という．

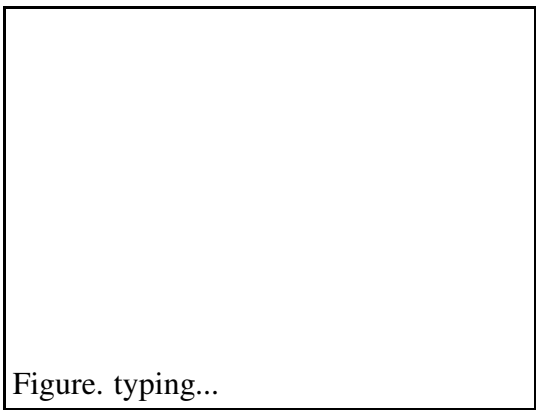
□

注意 3.65 （有向曲線） 始点と終点が同じであり，有向曲線が一周してもよい．

□



(a) 有向曲線



(b) 始点と終点が同じ有向曲線

例 3.66 （有向曲線） 始点 $(1, 1)$ から終点 $(2, 3)$ まで直線的に進む有向曲線は，

$$C = \{\, (x, y) \mid x = t + 1,\ y = 2t + 1,\ t : 0 \to 1 \,\}$$

と書ける．

□

例 3.67 （有向曲線） 単位円上を始点を $(1, 0)$ で反時計回りに一周するとき，x, y をパラメータ表示すると

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad t : 0 \to 2\pi$$

となる．この有向曲線は

$$C = \{\, (x, y) \mid x = \cos t,\ y = \sin t,\ t : 0 \to 2\pi \,\}$$

と書ける．時計回りに一周するときは，有向曲線は

$$C = \{\, (x, y) \mid x = \cos t,\ y = \sin t,\ t : 2\pi \to 0 \,\}$$

と書ける．

□

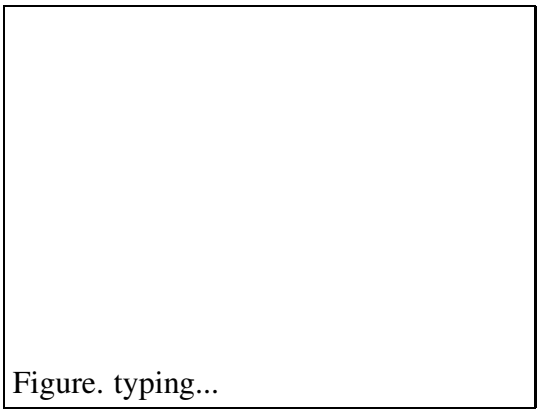
定義 3.68 （有向曲線） $a < c < b$ において，

$$C = \{\, (x, y) \mid x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t : a \to b \,\},$$
$$C_1 = \{\, (x, y) \mid x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t : a \to c \,\},$$
$$C_2 = \{\, (x, y) \mid x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t : c \to b \,\}$$

であるとき，

$$C = C_1 + C_2$$

と表記する． □



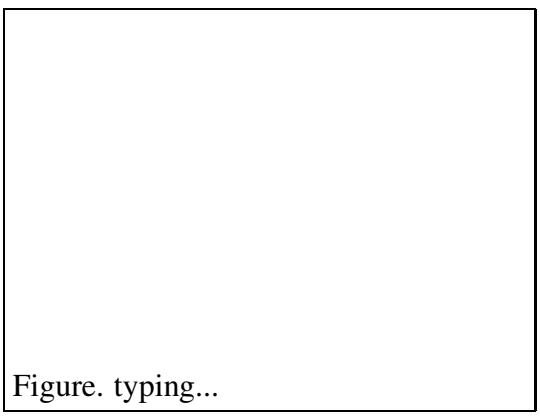
定義 3.69 （有向曲線） 有向曲線

$$C = \{\, (x, y) \mid x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t : a \to b \,\},$$
$$\tilde{C} = \{\, (x, y) \mid x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t : b \to a \,\}$$

に対して，

$$\tilde{C} = -C$$

と表記する． □



§ 3.15 線積分

定義 3.70 （線積分） 関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix}$ に対する有向曲線

$$C = \{\ (x,y) \mid\ x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t : a \to b\ \}$$

に関する線積分（**line integral**）を

$$\begin{aligned} \int_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot\ d\boldsymbol{x} &= \int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy \\ &= \int_a^b \left(f(x,y)\frac{dx}{dt} + g(x,y)\frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \left(f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + g(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) \right) dt \end{aligned}$$

と定義する．曲線 C を積分路（**integral path**）という．

□

注意 3.71 （線積分） 線積分は力学の仕事（**work**）である．typing...

□

Figure. typing...

定理 3.72 （線積分） 次の関係が成り立つ：

(i) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \int_{C_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} + \int_{C_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x}$ (ii) $\displaystyle\int_{-C} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = -\int_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x}$

□

例 3.73 （線積分） 線積分

$$I = \int_C (x+y)\,dx + xy\,dy, \qquad C = \left\{\ (x,y) \mid\ x = t,\ y = t^2,\ t : 0 \to a\ \right\}$$

を求める．$\dfrac{dx}{dt} = 1, \dfrac{dy}{dt} = 2t$ を用いて，線積分は

$$I = \int_0^a \left((t+t^2)\frac{dx}{dt} + t \cdot t^2 \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_0^a \left(t + t^2 + 2t^4 \right) dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} \right]_0^a = \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \frac{2a^5}{5}$$

と求まる．

□

§ 3.16 経路の異なる積分路における線積分

例 3.74 (線積分)　点 $P(1,0)$ から点 $Q(2,1)$ への経路を C_1 と C_2 の 2 通りを考える．

(i) 積分路 C_1 は P から Q へ直線的に進むとして，

$$C_1 = \{\, (x,y) \mid x = t+1,\ y = t,\ t : 0 \to 1 \,\}$$

とする．このとき線積分は

$$\begin{aligned} I &= \int_{C_1} (x-y)dx + y\,dy = \int_0^1 \left((t+1-t)\cdot(t+1)' + t\cdot(t)'\right) dt = \int_0^1 (t+1)\,dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_0^1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる．

(ii) 積分路 C_2 は P から点 $(2,0)$ を経由し Q へ直線的に進むとして，

$$\begin{aligned} &C_2 = C_{21} + C_{22}, \\ &C_{21} = \{\, (x,y) \mid x = t+1,\ y = 0,\ t : 0 \to 1 \,\}, \\ &C_{22} = \{\, (x,y) \mid x = 2,\ y = t,\ t : 0 \to 1 \,\} \end{aligned}$$

とおく．線積分は

$$\begin{aligned} I &= \int_{C_2} (x-y)dx + y\,dy = \int_{C_{21}} (x-y)dx + y\,dy + \int_{C_{22}} (x-y)dx + y\,dy \\ &= \int_0^1 \left((t+1-0)\cdot(t+1)' + 0\cdot(0)'\right) dt + \int_0^1 \left((2-t)\cdot(2)' + t\cdot(t)'\right) dt \\ &= \int_0^1 (t+1)\,dt + \int_0^1 t\,dt = \int_0^1 (2t+1)\,dt = \left[t^2 + t\right]_0^1 = 2 \end{aligned}$$

となる．　□

Figure. typing...

(a) C_1

Figure. typing...

(b) C_2

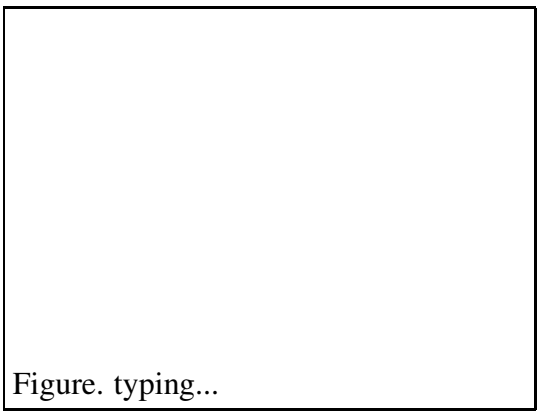
注意 3.75 (線積分)　$P \to Q$ への積分路が異なれば積分値も異なる．　□

定義 3.76 （線積分） 点 P から点 Q への経路によらず線積分が同じとき，その線積分を

$$\int_P^Q \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x}$$

と書く．

□



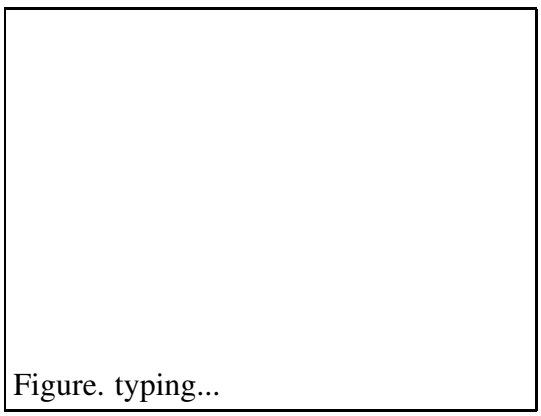
§ 3.17 線積分と多重積分

注意 3.77 （周回積分） 積分路 C が一周しているとき，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x}$ を

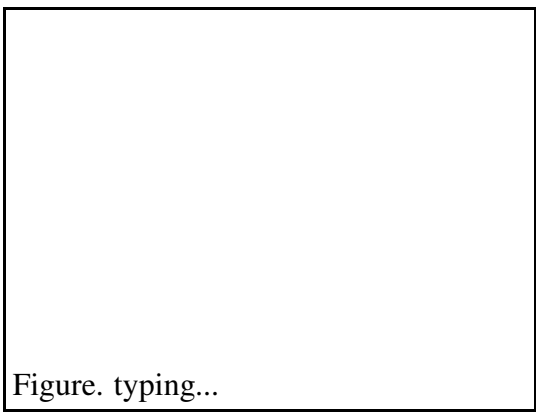
$$\oint_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x}$$

と表記することがある．これを周回積分とも呼ぶ． □

定義 3.78 （領域の境界） 領域 D の境界を ∂D と表記する．このとき内部が進行方向の左手になるように向きを定める（注意）ここで ∂ は偏微分の記号とは全く関係ない．単に記号の形が「ぐるっとまわる」の見えるため． □



(a) 領域 D と境界 ∂D



(b) 穴のあいた領域 D

定理 3.79 （グリーンの定理） 領域 D 内で関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が連続なとき，

$$\oint_{\partial D} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x} = \oint_{\partial D} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) dxdy$$

が成り立つ． □

注意 3.80 （グリーンの定理） グリーンの定理は線積分と多重積分の移り合いを表す． □

例 3.81 （グリーンの定理の使用例） C を半径 a の円上を 1 周する有向曲線

$$C = \{\ (x,y)\ |\ x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t : 0 \to 2\pi\ \}$$

とする．このとき C の内部の領域は

$$D = \{\ (x,y)\ |\ x^2 + y^2 \le a^2\ \}$$

である．領域 D において関数 $f(x,y)=y, g(x,y)=-x$ は連続であるから，線積分

$$I=\oint_C y\,dx-x\,dy$$

はグリーンの定理が適用でき，

$$I=\iint_D (g_x-f_y)dxdy=\iint_D(-1-1)dxdy=-2\iint_D dxdy=-2\int_0^a r\,dr\int_0^{2\pi}d\theta=-2\pi a^2$$

と計算される．□

例 3.82（グリーンの定理が使用不可な例） 線積分

$$I=\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy,\quad C=\{\,(x,y)\mid x=\cos t,\ y=\sin t,\ t:0\to 2\pi\,\}$$

を考える．C は単位円上を 1 周する有向曲線であり，C の内部の領域は

$$D=\left\{\,(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\,\right\}$$

である．関数

$$f(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad g(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

は原点で連続ではないので，領域 D のすべての点において関数 f,g は連続ではないからグリーンの定理は適用できない．

誤りではあるが，グリーンの定理を適用して計算すると，

$$f_y=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad g_x=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad g_x-f_y=0$$

より，

$$I=\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=\iint_D(g_x-f_y)dxdy=\iint_D 0\,dxdy=0$$

となる．正しくは，

$$\begin{aligned}I&=\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=\int_0^{2\pi}\left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}(-\sin t)+\frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\cos t\right)dt\\&=\int_0^{2\pi}dt=2\pi\end{aligned}$$

と得られる．□

§ 3.18 経路に依存しない線積分

定理 3.83 （グリーンの定理の使用例） $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が D で連続でかつ $g_x = f_y$ のとき，

$$\oint_{\partial D} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \iint_D (g_x - f_y) dxdy = 0$$

が成り立つ．

□

例 3.84 （グリーンの定理の使用例） 任意の周回積分路 C に対して，

$$I = \oint_C xy^2\,dx + x^2y\,dy = 0$$
$$I = \oint_C \sin(x^2 + 3x + e^{x^2})\,dx + (y + y^5)e^{y^2-y}\,dy = 0$$

が成り立つ．

□

注意 3.85 （経路によらない線積分） 任意の周回積分路 C に対して，

$$I = \oint_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = 0$$

のとき，点 P から点 Q への任意の積分路 C_1 に対する線積分は一定となる．なぜなら，2 つの異なる点 P から点 Q への積分路を C_1, C_2 とする．このとき $C_1 - C_2 = C$ は周回する積分路となる．よって

$$I = \oint_C \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \oint_{C_1 - C_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \int_{C_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} - \oint_{C_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = 0$$

より，

$$\oint_{C_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \oint_{C_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x} = \oint_P^Q \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{x}$$

を得る．

□

例 3.86（経路に依存しない線積分） 任意の周回積分路に関して，

$$\oint_C xy^2\,dx + x^2y\,dy = 0$$

が成り立つ．よって，任意の点 P, Q に対して線積分

$$I = \int_P^Q xy^2\,dx + x^2y\,dy$$

は積分の経路に依存しない．例えば $P(1,0), Q(2,1)$ とする．P から Q を直線的に進む経路を

$$C_1 = \{\ (x,y)\ |\ x = t+1,\ y = t,\ t : 0 \to 1\ \}$$

とする．このとき線積分は

$$\begin{aligned} I &= \int_{C_1} xy^2\,dx + x^2y\,dy = \int_0^1 ((t+1)t^2 + (t+1)^2 t)dt = \int_0^1 (2t^3 + 3t^2 + t)dt \\ &= \left[\frac{t^4}{2} + t^3 + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 2 \end{aligned}$$

となる．また，P から点 $(2,0)$ を経由し Q へ進む経路を

$$\begin{aligned} &C_2 = C_{21} + C_{22}, \\ &C_{21} = \{\ (x,y)\ |\ x = t+1,\ y = 0,\ t : 0 \to 1\ \}, \\ &C_{22} = \{\ (x,y)\ |\ x = 2,\ y = t,\ t : 0 \to 1\ \} \end{aligned}$$

とする．このとき線積分は

$$I = \int_{C_2} xy^2\,dx + x^2y\,dy = \int_0^1 (0+0)dt + \int_0^1 (0 + 2^2 t)dt = \int_0^1 4t\,dt = \left[2t^2\right]_0^1 = 2$$

となる．異なる積分路 C_1, C_2 に対して積分の値は等しい．他の経路に対しても同じ値をもつので，

$$I = \int_{(1,0)}^{(2,1)} xy^2\,dx + x^2y\,dy = 2$$

と書ける． □

§ 3.19 線積分による面積の計算

注意 3.87 （線積分による面積の計算） 領域 D とのその周回 ∂D に対して周回積分

$$I = \oint_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$

を考える．$f = -y, g = x$ は $\mathbb{R}^2$ 全体で連続であるから，領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ でも連続であり，グリーンの定理が適用可能である．よって

$$I = \iint_D (g_x - f_y)dxdy = \iint_D (1 - (-1))dxdy = 2\iint_D dxdy = 2S(D)$$

が成り立つ．よって I は領域 D の面積 $S(D)$ の 2 倍となる． □

例 3.88 （線積分による面積の計算） 領域

$$D = \left\{ (x, y) \mid x \le \cos t,\ y \le \sin^5 t,\ 0 \le t \le 2\pi \right\}$$

の面積を求める．面積は

$$S(D) = \frac{I}{2} = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$

と表される．ただし，境界線は

$$\partial D = \left\{ (x, y) \mid x = \cos t,\ y = \sin^5 t,\ t : 0 \to 2\pi \right\}$$

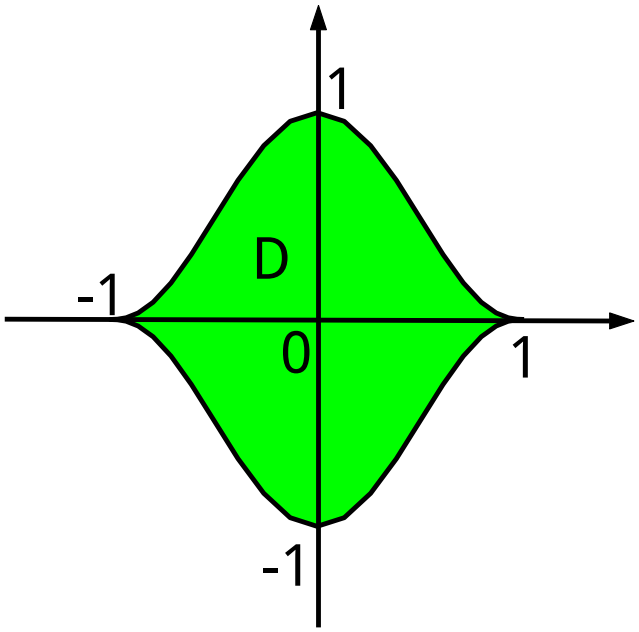
である．線積分を計算すると

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{\partial D} x\,dy - y\,dx = \int_0^{2\pi} (\cos t \times 5\sin^4 t \cos t - \sin^5 t \times (-\sin t))\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (5\sin^4 t\cos^2 t + \sin^6 t)\,dt = \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos^2 t - 7\cos^4 t + 4\cos^6 t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\frac{3}{4} - \cos 2t - \frac{1}{4}\cos^2 2t + \frac{1}{2}\cos^3 2t)\,dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{8}\cos 4t - \frac{1}{2}\cos 2t \sin^2 2t\right)\,dt \\
&= \left[\frac{5t}{8} - \frac{\sin 2t}{4} - \frac{\sin 4t}{32} - \frac{\sin^3 2t}{12}\right]_0^{2\pi} = \frac{5\pi}{4}
\end{aligned}$$

となる．よって面積は

$$S(D) = \frac{I}{2} = \frac{1}{2}\frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{8}$$

と求まる．


1
D
-1
0
1
-1

□