# 2004年度 線形代数学II（2）（近藤）　演習問題

[I] 次のベクトル $u_1, u_2, \cdots, u_n$ を考える．(i) 1 次独立なベクトルの最大個数を述べよ．(ii) 最大個数となるベクトルの組合わせを一つ述べよ．(iii) 1 次従属となるベクトルを他の 1 次独立となるベクトルの線形結合で表せ．

(1) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.　(2) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$ $\boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.　(3) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$.　(4) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$ $\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.　(5) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

[II] 次の行列 $A$ を考える．(i) 列ベクトルの 1 次独立なベクトルの最大個数を述べよ．(ii) 行ベクトルの 1 次独立なベクトルの最大個数を述べよ．

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$　(2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$　(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$　(4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(5) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$　(6) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$　(7) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

[III] 次の $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $W$ が $\mathbb{R}^n$ は部分空間である否か述べよ．
(1) $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$　(2) $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$
(3) $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0\}$ ただし $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ はあるベクトル.
(4) $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$　(5) $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \|\boldsymbol{x}\| \le 1\}$
(6) $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | x_1 \le 1, x_2 \le 1, \cdots, x_n \le 1\}$

[IV] 問 [I] のベクトル $u_1, u_2, \cdots, u_n$ により生成される部分空間 $W =< u_1, u_2, \cdots, u_n >$ を考える．(i) $W$ の基底を求めよ．(ii) $W$ の正規直交基底を求めよ．(iii) $W$ の次元を求めよ．

[V] 問 [II] の行列 $A$ で与えられる同次連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間 $W$ を考える．(i) 方程式の基本解と一般解を求めよ．(ii) 解空間 $W$ を求めよ．(iii) $W$ の基底を求めよ．(iv) $W$ の正規直交基底を求めよ．(v) $W$ の次元を求めよ．

[VI] 問 [IV],[V] の部分空間 $W$ の直交補空間 $W^\perp$ を考える．(i) $W^\perp$ を求めよ．(ii) $W^\perp$ の基底を求めよ．(iii) $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ．(iv) $W^\perp$ の次元を求めよ．

[VII] 次の部分空間 $W_1, W_2, W_3$ とその和空間 $W_{12} = W_1 + W_2, W_{13} = W_1 + W_3, W_{23} = W_2 + W_3$, $W_{123} = W_1 + W_2 + W_3$ を考える．これらの空間の基底と次元を求めよ．

$$W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

[VIII] 次の基底 $\Sigma$ における位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ の点の座標を求めよ．

(1) $\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (2) $\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

[IX] 次の写像 $f$ は線形写像であるか否か述べよ．

(1) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, ただし $A : m \times n$.
(2) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, ただし $A : m \times n$, $\boldsymbol{b} : m \times 1$.
(3) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; y = f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}) + \cdots + (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{x})$
(4) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; y = f(\boldsymbol{x}) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2$
(5) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; y = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$, ただし $A : n \times n$.

[X] 次の線形写像 $f$ を考える．(i) 表現行列を求めよ．(ii) 正則変換であるか否か述べよ．

(1) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, ただし $A : m \times n$.
(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_2 + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_3$
(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_2$
(4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_2$
(5) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, ただし $f$ は $f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{a}$, $f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{b}$ をみたす．
(6) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, ただし $f$ は $f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{a}$, $f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{c}$ をみたす．
(7) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, ただし $f$ は $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$, $f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$ をみたす．
(8) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, ただし $f$ は $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}$, $f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$ をみたす．

ただし $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

[XI] 問 [X] の線形写像 $f$ に関する次の基底における表現行列を求めよ．

(1) $\mathbb{R}^n \supset \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}, \mathbb{R}^m \supset \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$
(2) $\mathbb{R}^2 \supset \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, \mathbb{R}^3 \supset \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ (3)–(8) $\mathbb{R}^2 \supset \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

[XII] 次の行列を直交行列となるようにパラメータを定めよ．

(1) $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} a & c & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & c & -a \end{bmatrix}$

[XIII] 直交変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考える．このとき任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ を $f$ で写したベクトルを $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'$ とおく．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ とのなす角と $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{y}'$ とのなす角は等しいことを示せ．