

解析学I (担当:近藤) #8
2006年6月15日

[I] 関数 $f(x) = \cos x$ の近似を考える.

(i) 関数 $f(x)$ を原点の近くで多項式で近似せよ. 0次から4次の近似多項式 $f_0(x), f_1(x), \dots, f_4(x)$ を求めよ.

(ii) 次の関数の原点まわりのテイラー展開を求めよ. ただし0次から4次まで展開し, 6次の剰余項 $R_6(x)$ も具体的に求めよ.

(iii) $f_4(x)$ の誤差が0.0001未満となる x の範囲を求めよ.

[II] 次の関数の原点まわりのテイラー展開を求めよ. ただし0次から3次まで展開し, 4次の剰余項 $R_4(x)$ も具体的に求めよ.

(1) $f(x) = e^x$

(2) $f(x) = \log(1+x)$

[III] 次の極限をテイラー級数展開を用いて求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x \right)$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - \sin x}{x^2}$