

解析学II (担当:近藤) #5
2006年11月9日

[I] 座標 (x, y) から斜交座標 (u, v) への座標変換

$$x = u + v, \quad y = -u + 2v$$

に対して, 次の問に答えよ.

(1) z_u, z_v を z_x, z_y を用いて書き表せ.

(2) z_x, z_y を z_u, z_v を用いて書き表せ.

(3) 関数 $z = f(x, y)$ に対する関数

$$F = (z_x)^2 + (z_y)^2 \text{ を座標 } uv \text{ で表せ.}$$

(4) 関数 $z = f(x, y)$ に対する関数

$$F = z_{xx} + z_{yy} \text{ を座標 } uv \text{ で表せ.}$$

(5) ラプラス作用素 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

を座標 uv で表せ.

[II] 次の問を求めよ.

(1) 2次元の極座標

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

のヤコビアン $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(2) 3次元の極座標

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

のヤコビアン $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)}$ を求めよ.