

線形代数学 II(2)(近藤)

中間試験

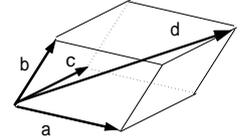
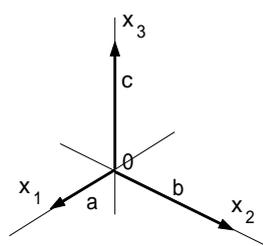
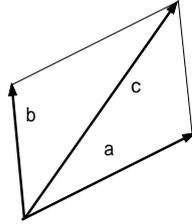
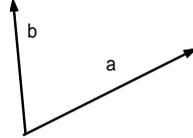
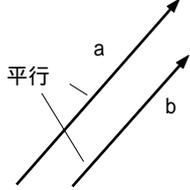
(注意) 問 1 ~ 問 4 に関しては答えのみを解答欄に記入せよ．問 5 ~ 問 8 に関しては解答欄に論述せよ．

問 1. ベクトル空間 V の部分集合 W が V の部分空間となるか答えよ．部分空間である場合は解答欄に \times を記入し，部分空間ではない場合は解答欄に \times を記入せよ．(10 点)

- (1) $V = \mathbb{R}^2 \supset W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 0 \right\}$ (2) $V = \mathbb{R}^2 \supset W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}$
- (3) $V = \mathbb{R}^2 \supset W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0 \right\}$ (4) $V = \mathbb{R}^3 \supset W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1 \right\}$
- (5) $V = \mathbb{R}^3 \supset W = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$

問 2. 次のベクトルの組は 1 次独立であるか 1 次従属であるか答えよ．1 次独立な場合は解答欄に \times を記入し，1 次従属な場合は解答欄に \times を記入せよ (20 点)

- (1) $\{a, b\} \in \mathbb{R}^2$ (2) $\{a, b\} \in \mathbb{R}^2$ (3) $\{a, b, c\} \in \mathbb{R}^2$ (4) $\{a, b, c\} \in \mathbb{R}^3$ (5) $\{a, b, c, d\} \in \mathbb{R}^3$



- (6) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (7) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

- (8) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

- (9) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (10) $\mathbb{R}^4 \ni \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$

問 3. $\{u_1, u_2, u_3\}$ を \mathbb{R}^3 の基底とする. このとき次の式で与えられる $\{v_1, v_2, \dots\}$ は \mathbb{R}^3 の基底となるか答えよ. 基底となる場合は解答欄に を記入し, 基底とならない場合は解答欄に \times を記入せよ. (10 点)

$$(1) \begin{cases} v_1 = u_1 - u_2 + u_3 \\ v_2 = u_1 + u_2 - u_3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} v_1 = u_1 - u_2 + u_3 \\ v_2 = -u_1 + u_2 - u_3 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} v_1 = u_1 - u_2 + u_3 \\ v_2 = u_1 + 3u_2 - u_3 \\ v_3 = 2u_1 - u_2 + 2u_3 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} v_1 = u_1 + u_2 - 3u_3 \\ v_2 = u_1 + 3u_2 - u_3 \\ v_3 = u_2 + u_3 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} v_1 = u_1 - u_2 + u_3 \\ v_2 = u_1 + 3u_2 - u_3 \\ v_3 = 2u_1 - u_2 + 2u_3 \\ v_4 = u_1 + 2u_2 + u_3 \end{cases}$$

問 4. 次の写像 f は線形写像であるか答えよ. 線形写像である場合は解答欄に を記入し, 線形写像ではない場合は解答欄に \times を記入せよ. (10 点)

(1) 点 x から原点 0 に関して点対称な点 y への変換 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; x \mapsto y$.

(2) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; y = f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 1 \end{bmatrix}$ (3) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; y = f(x) = |x_1 - x_2|$

(4) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; y = f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix}$ (5) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; y = f(x) = \begin{bmatrix} 2x \\ 3x \end{bmatrix}$

問 5. 次の解空間 W を求め, その基底と次元を述べよ. (10 点)

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 & -7 & 10 \end{bmatrix} x = 0 \right\}$$

問 6. 次の \mathbb{R}^3 の基底 $\Sigma = \{v_1, v_2, v_3\}$ をグラム・シュミットの直交化法で正規直交化せよ. (10 点)

$$\Sigma = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

問 7. 次の線形写像 f の標準基底における表現行列を求めよ. (20 点)

(1) $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -6 \\ -13 \end{bmatrix}$ をみたく $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(2) 点 x から原点 0 に関して点対称な点 y への変換 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; x \mapsto y$.

(3) 点 x を原点を中心に反時計回りに $2\pi/3$ 回転させた点 y への変換 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; x \mapsto y$.

(4) 点 x を直線 $x_1 - x_2 = 0$ に対して鏡映変換した点 y への変換 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; x \mapsto y$.

問 8. 次の線形写像 f の核, 像, 退化次数, 階数を求めよ. (10 点)

$$f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4; f(x) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

問 1.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
-----	-----	-----	-----	-----

問 2.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

問 3.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
-----	-----	-----	-----	-----

問 4.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
-----	-----	-----	-----	-----