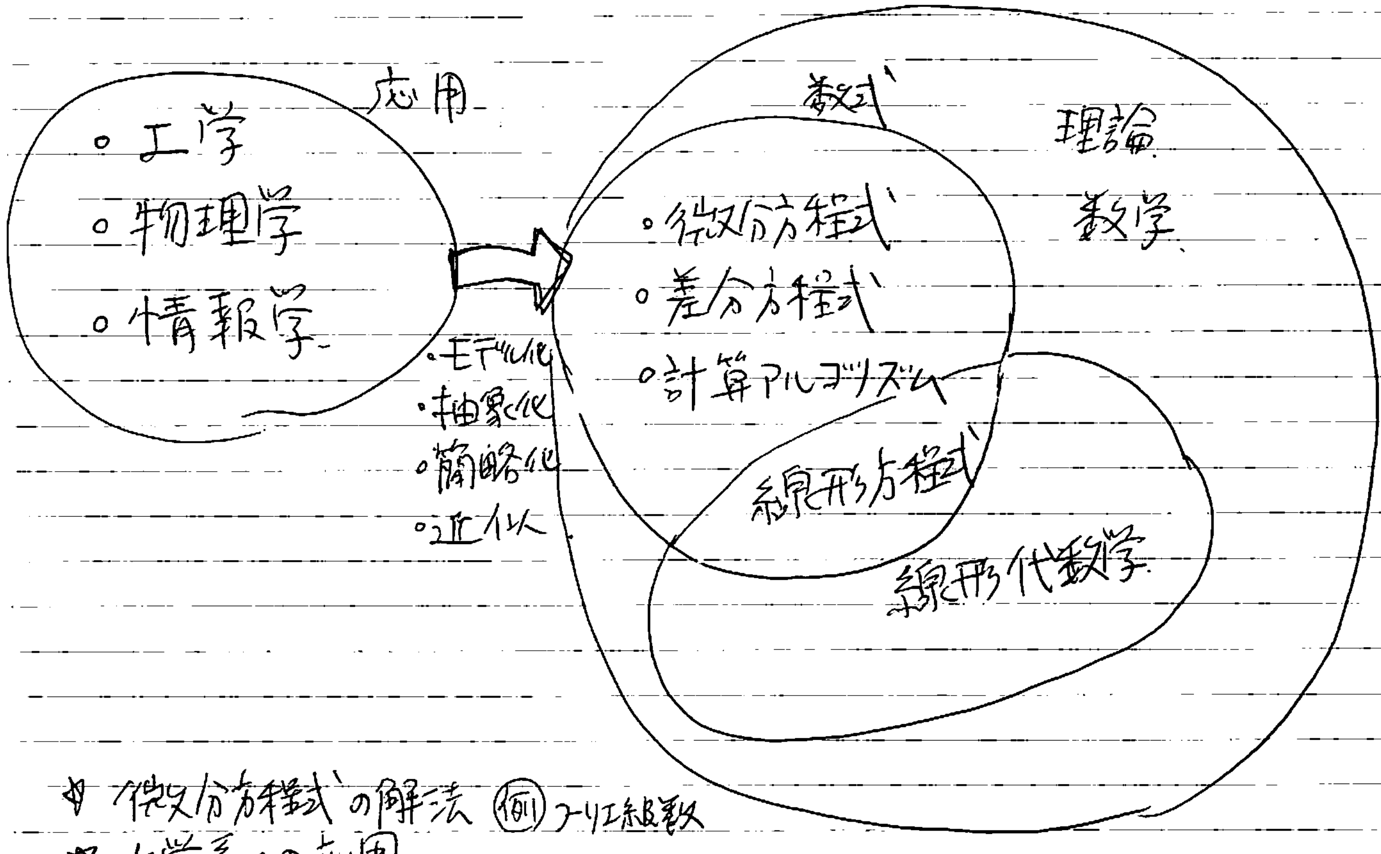
まえがき

① 線形変換の例題（線形代数学Ⅰ,Ⅱの復習および補足）

② 微分方程式,差分方程式への応用（解法および解析）

③ 固有値分解の数値計算（コンピュータ上での計算方法）



☆ 微分方程式の解法 (例)フーリエ級数

☆ 力学系への応用
　— ニュートンの運動方程式の解法および解析

☆ 工学,情報学への応用
　— 信号処理（音声,画像,…） (例)CTスキャン
　— 統計処理 (例)株価予測,天気,気象
　— 情報処理 (例)検索エンジン
　— コンピュータグラフィックス

☆ 現代ではコンピュータ上での解析手法としての応用

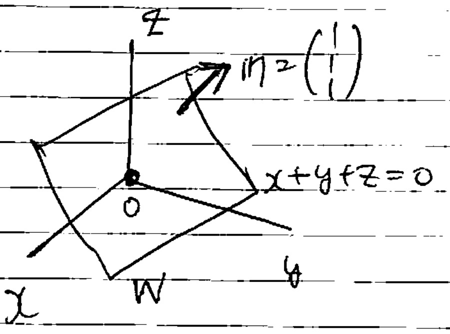
線形変換

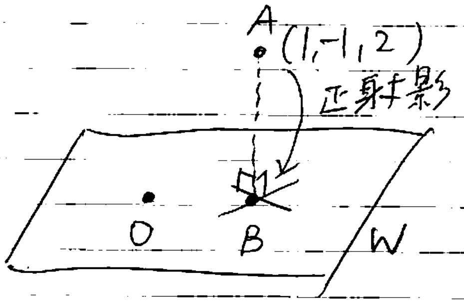
課題

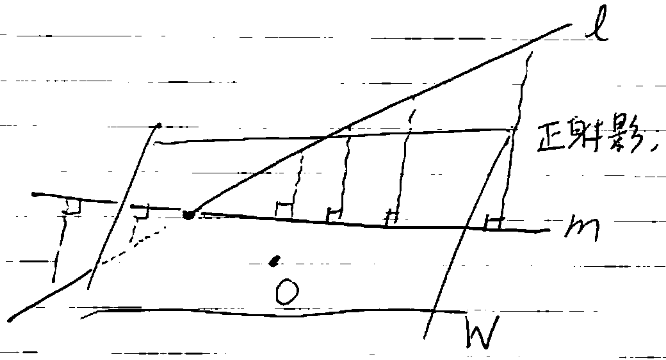
$\mathbb{R}^3$ の点$(1,-1,2)$と直線 $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{3}$ とを

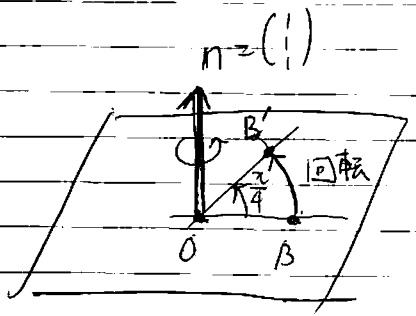
平面 $x+y+z=0$ へ正射影せよ。また，その後に，

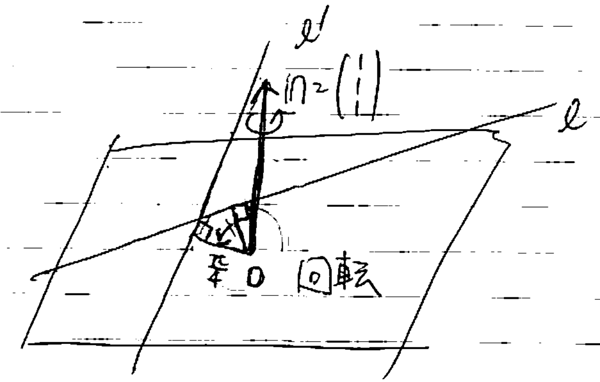
平面の法線ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ を軸として $\frac{\pi}{4}$ 回転させよ。



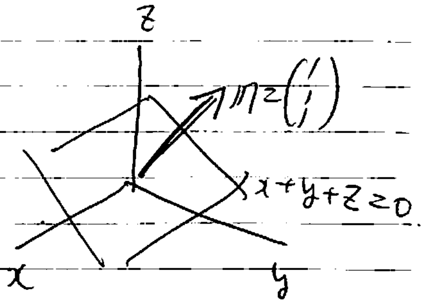








§ 部分空間



平面 $x+y+z=0$ は方程式 $x+y+z=0$ の解空間

$$W=\{(x,y,z)\mid x+y+z=0\}$$

である。Wの基底を求める。

$$x+y+z=0 \Longrightarrow (1\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\mathbb{0} \quad \left.\begin{matrix}A\mathbb{x}=\mathbb{0}\\ \mathrm{rank}(A)=1\end{matrix}\right\}$$ より任意定数は $3-\mathrm{rank}(A)=2$ 個である。

$z=-x-y$ より、$x=c_1$, $y=c_2$ $(\forall c_1\in\mathbb{R}, \forall c_2\in\mathbb{R})$ とおく。

$$\mathbb{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c_1-c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=c_1\mathbb{p}_1+c_2\mathbb{p}_2$$

となる。よって W は $\mathbb{p}_1$ と $\mathbb{p}_2$ で張られる空間

$$W=\langle \mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2\rangle_{\mathbb{R}}=\{c_1\mathbb{p}_1+c_2\mathbb{p}_2\mid c_1, c_2\in\mathbb{R}\}$$

である。$\{\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2\}$ は1次独立であるから、$\{\mathbb{p}_1, \mathbb{p}_2\}$ は W の基底である。

(注) W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である。次元は $\dim(W)=2$ となる。

(定義) ベクトル空間 V の部分集合 W がベクトル空間であるとき W を V の部分空間という。

$$\Longleftrightarrow \left.\begin{matrix}W\ni{}^\forall\mathbb{x}, {}^\forall\mathbb{y}\\ \mathbb{R}\ni{}^\forall\alpha, {}^\forall\beta\end{matrix}\right\} に対して\ \alpha\mathbb{x}+\beta\mathbb{y}\in W.$$

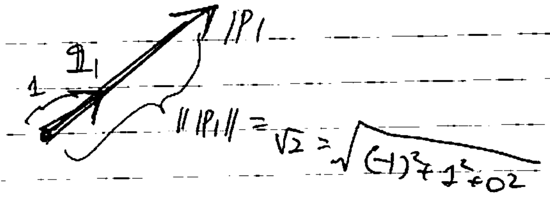
(注) 必ず $\mathbb{0}\in W$ である。
原点 $\mathbb{0}$ を含む。

§ 正規直交化

Wの基底$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$を正規直交化しておくと，後で便利である。

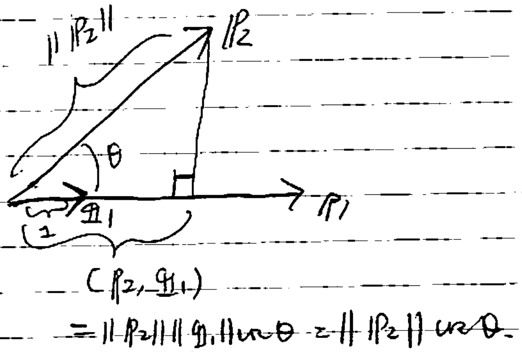
まず，$\mathbf{p}_1$を規格化して

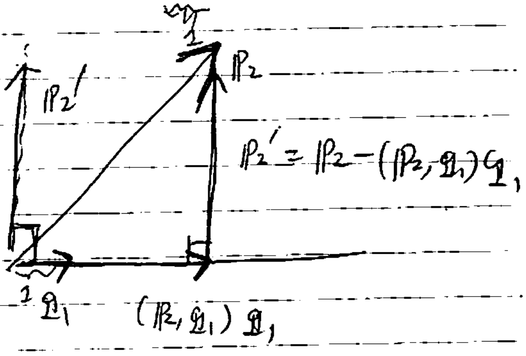
$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{p}_1}{\|\mathbf{p}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$



とおく。次に，$\mathbf{q}_1$と直交するベクトルを

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_2' &= \mathbf{p}_2 - (\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_1\\
&= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1+0+0}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2+1\\0-1\\2+0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\\
&= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$



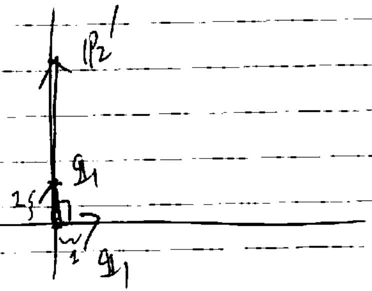


とおめる，$\mathbf{p}_2'$を規格化して

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{p}_2}{\|\mathbf{p}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

となる。以上より

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1) = 1,\ (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = 0,\ (\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2) = 1$$



が成り立つので，

$$\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

はWの正規直交基底である。Wは

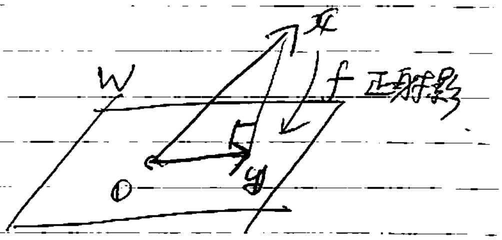
$$W = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle_{\mathbb{R}}$$

とも書ける。

§ 正射影

点 x を平面 W に垂直に下した点を y とする。

変換 $f: x \mapsto y$ を正射影とよぶ。

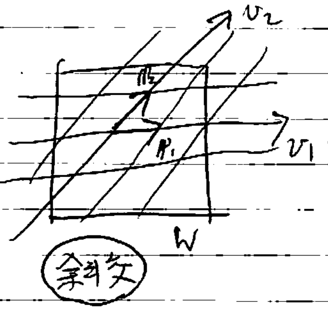


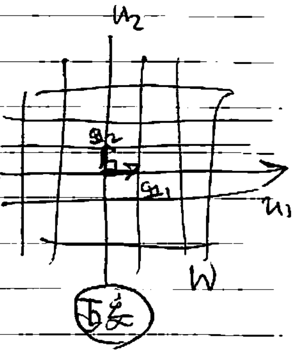
$\mathbb{R}^3 \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とおき、

変換 $y = f(x)$ を求める。

y は W 上の点であるから、$y \in W$ であり

$$W \ni y = u_1 q_1 + u_2 q_2$$





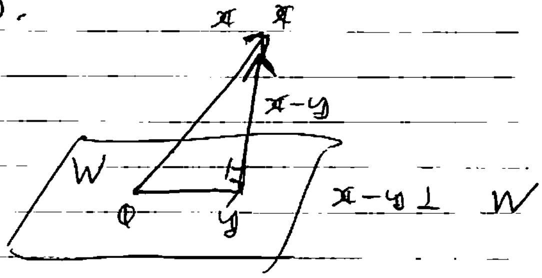
とおける。(u_1, u_2) は基底 $\Sigma = \{q_1, q_2\}$ における W の座標である。

注 $W \ni y = v_1 p_1 + v_2 p_2$ と書いてもよいが、

$\{p_1, p_2\}$ は斜交座標であり、後で計算がめんどうになる。

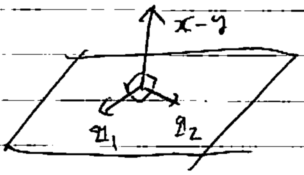
正規直交基底 $\{q_1, q_2\}$ を用いた方が楽となる。

$\boxed{\text{導出1}}$



図より、$x - y$ と W は直交

$$x - y \perp W$$



$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - y \perp q_1 \\ x - y \perp q_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x - y, q_1) = 0 \cdots ① \\ (x - y, q_2) = 0 \cdots ② \end{cases}$$

① より、$(x - y, q_1) = (x, q_1) - (y, q_1) = (x, q_1) - (u_1 q_1 + u_2 q_2, q_1)$

$= (x, q_1) - u_1 \underbrace{(q_1, q_1)}_{1} - u_2 \underbrace{(q_2, q_1)}_{0} = (x, q_1) - u_1 = 0$

$\Longrightarrow u_1 = (x, q_1)$

② より、$(x - y, q_2) = (x, q_2) - (y, q_2) = (x, q_2) - (u_1 q_1 + u_2 q_2, q_2)$

$= (x, q_2) - u_1 \underbrace{(q_1, q_2)}_{0} - u_2 \underbrace{(q_2, q_2)}_{1} = (x, q_2) - u_2 = 0$

$\Longrightarrow u_2 = (x, q_2)$

よって，正射影は

$$f : x \mapsto y = u_1 g_1 + u_2 g_2 = (x, g_1) g_1 + (x, g_2) g_2$$

と得られる。

§ 正規直交基底における座標

注 一般に，正規直交基底 $\{g_1, \cdots, g_n\}$ における座標 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ は，

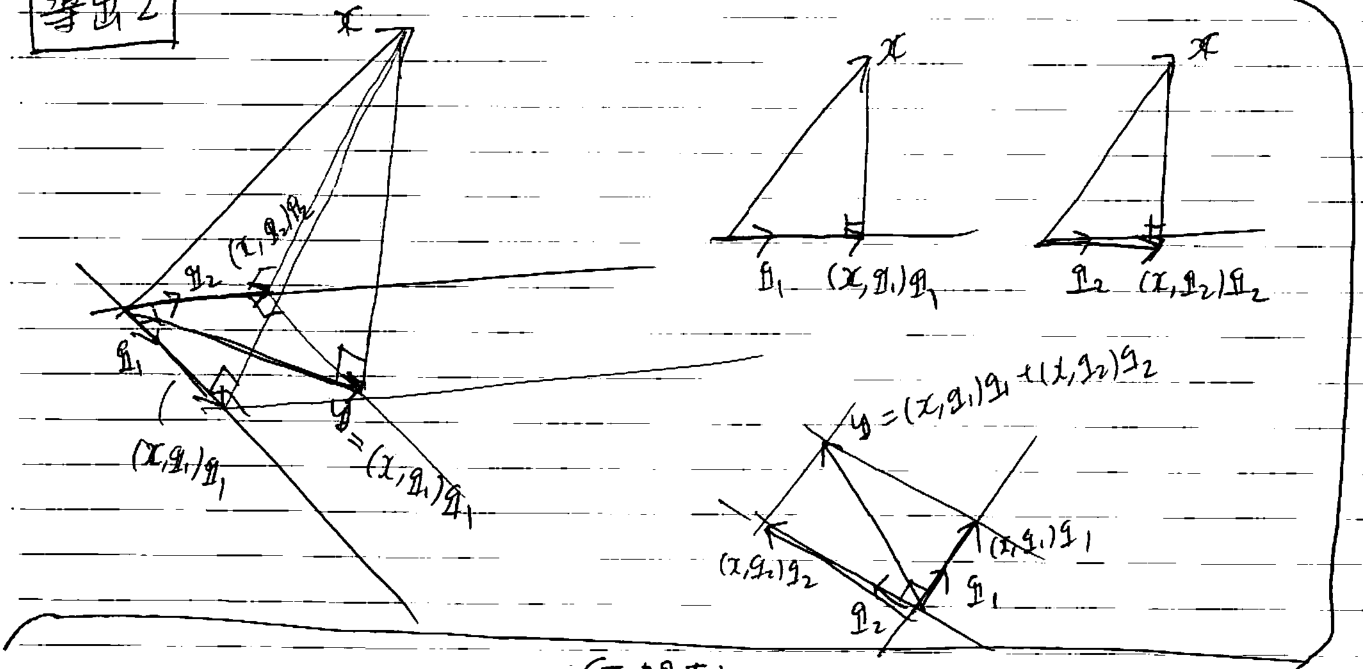
$$u_1 = (x, g_1),\ u_2 = (x, g_2),\ \cdots,\ u_n = (x, g_n)$$

で求まる。

∵ $x = u_1 g_1 + u_2 g_2 + \cdots + u_2 g_n$ の両辺と g_i の内積をとり，$(g_i, g_j) = \delta_{ij}$ より

$$\begin{aligned}(x, g_i) &= (u_1 g_1 + \cdots + u_i g_i + \cdots + u_n g_n,\ g_i)\\ &= u_1 \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\boxed{(g_1, g_i)}}} + \cdots + u_i \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\boxed{(g_i, g_i)}}} + \cdots + u_n \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\boxed{(g_n, g_i)}}}\\ &= u_i.\end{aligned}$$

導出2



例 周期 2π の関数空間の正規直交基底 $\{\cdots, e^{-2ix}, e^{-ix}, 1, e^{ix}, e^{2ix}, \cdots\}$ は 内積 $(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx$ のもとで正規直交基底である。よって，

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nix}, \quad c_n = (f, e^{nix}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{nix} dx$$

と表される。フーリエ級数展開である。

No.
Date.

§ 表現行列

射影変換

$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2$

を行列表現

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x},\ A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

で表す。Aをfの表現行列とよぶ

定義

f：線形変換 $\Longleftrightarrow$ $f(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y})$

(注) 射影変換は線形変換である。ⓐ示せ.

定理 任意の線形変換 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表される.

導出1

$\mathbb{R}^3$の標準基底を $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ とおく.

このとき

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$$

と表される。fは線形変換であるから,

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + x_3 f(\boldsymbol{e}_3)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = A\boldsymbol{x}.$$

と書ける。fの表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix}$$

とする.

ここで，

$$f(\mathbf{e}_1)=(\mathbf{e}_1,\mathbf{g}_1)\mathbf{g}_1+(\mathbf{e}_1,\mathbf{g}_2)\mathbf{g}_2=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{-1+0+0}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1+0+0}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3+1\\-3+1\\0-2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{e}_2)=(\mathbf{e}_2,\mathbf{g}_1)\mathbf{g}_1+(\mathbf{e}_2,\mathbf{g}_2)\mathbf{g}_2=\frac{0+1+0}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{0+1+0}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

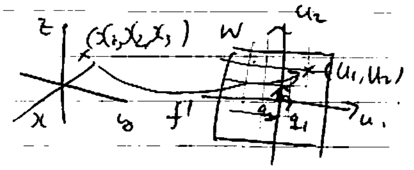
$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3+1\\3+1\\0-2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{e}_3)=(\mathbf{e}_3,\mathbf{g}_1)\mathbf{g}_1+(\mathbf{e}_3,\mathbf{g}_2)\mathbf{g}_2=\frac{0+0+0}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{0+0-2}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

より，表現行列は

$$A=\begin{pmatrix}f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) & f(\mathbf{e}_3)\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

と得られる。



導出2 まず，射影変換 $f':\mathbb{R}^3\to W$ を求める。

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}u_1=(\mathbf{g}_1,\mathbf{x})=\mathbf{g}_1^T\mathbf{x}\\u_2=(\mathbf{g}_2,\mathbf{x})=\mathbf{g}_2^T\mathbf{x}\end{cases}$$ より，

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{g}_1^T\\\mathbf{g}_2^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}&\sqrt{3}&0\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

と表される。

$$\varphi: W\to\mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=u_1\mathbf{g}_1+u_2\mathbf{g}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{g}_1&\mathbf{g}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}&1\\\sqrt{3}&1\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$ を用いると，

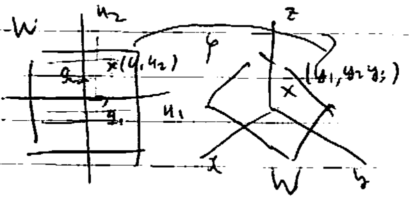
$$f=\varphi\circ f':\mathbb{R}^3\to W\to\mathbb{R}^3$$ より，

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{g}_1&\mathbf{g}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{g}_1&\mathbf{g}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{g}_1^T\\\mathbf{g}_2^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}&1\\\sqrt{3}&1\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}&\sqrt{3}&0\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$ と得られる



No

Date

§ べき等行列

問 $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ が $A^2=A$ をみたすことを示せ.

定義 A：べき等行列 $\Longleftrightarrow A^2=A$.

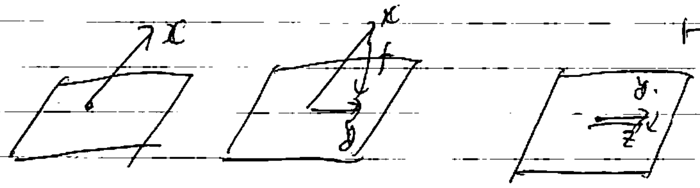
問 $A^k=A$ $(k=2,3,4,\cdots)$ を示せ.

定理 f：射影変換 $\Longleftrightarrow A$：べき等行列.

注

$$x \xmapsto{f} y=f(x)=Ax \xmapsto{f} z=f(f(x))=f\circ f(x)=A^2x=Ax=y.=Iy$$

$$\xmapsto{f} w=\underbrace{f\circ f\circ f}_{3}(x)=A^3x=Ax=\underset{Iy}{\overset{\shortparallel}{y}} \xmapsto{f} \cdots$$

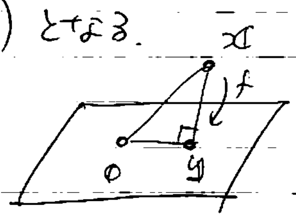


☆ 2回目以降の変換は変化がない.(恒等的である)

$\Longleftrightarrow A^k=A$.

§ 正射影の例

問 点 $(1,-1,2)$ を平面 W へ正射影すると点 $\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$ となる。



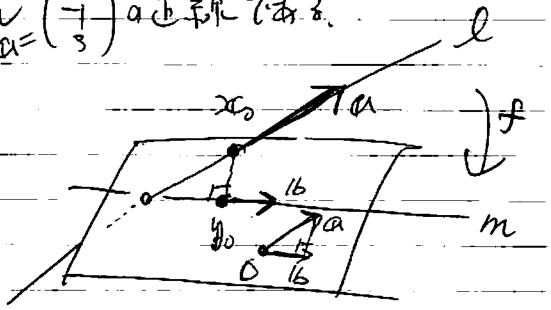
$$\because\ y = Ax = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}$$

問 直線 $l:\ \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-1}{3} = t$ を W へ正射影する。

直線をパラメータ表示すると

$$x = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t+3\\-t-2\\3t+1\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = ta + x_0$$

である。直線 l は点 $\underset{x_0}{\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}}$ を通る方向ベクトル $a=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ の直線である。



x_0, a を正射影して

$$y_0 = Ax_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}7\\-8\\1\end{pmatrix}$$

$$b = Aa = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-7\\5\end{pmatrix}$$

となる。l を正射影した直線 m は

方向ベクトル b で点 y_0 を通る直線であるから、
パラメータ表示は

$$x = tb + y_0 = \frac{t}{3}\begin{pmatrix}2\\-7\\5\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}7\\-8\\1\end{pmatrix}$$

である。成分で表すと、

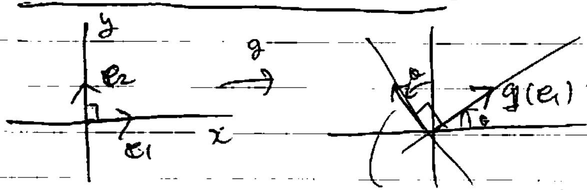
$$\frac{3x-7}{2} = \frac{3y+8}{-7} = \frac{3z-1}{5}$$

と得られる。

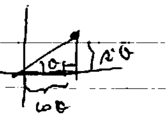
(問) m が W 上にあることを確認せよ。

§ 回転変換

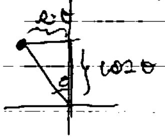
$\mathbb{R}^2$における回転変換 $g: \overset{\overset{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}}{\shortparallel}}{x} \mapsto \overset{\overset{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}}{\shortparallel}}{y}$ を求める。図より、



$g(e_1) = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$



$g(e_2) = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$



$$\begin{aligned} y &= g(x) \\ &= g(x_1e_1 + x_2e_2) \\ &= x_1g(e_1) + x_2g(e_2) \\ &= \begin{pmatrix} g(e_1) & g(e_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \\ &= Rx. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{定義}}$ $R(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ ：**回転行列**

問

(1) $R^TR = I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow R$：**直交行列**

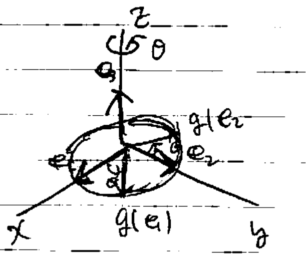
(2) $R^{-1} = R^T$

(3) $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$

(4) $R(\theta)R(\phi) = R(\theta+\phi)$

$\mathbb{R}^3$における回転変換 $g: x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ を求める.

z軸まわりに回転させる場合. $g_3: x \mapsto y$



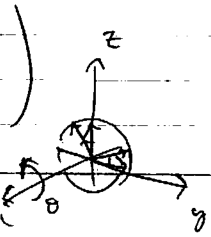
$g_3(e_1) = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$, $g_3(e_2) = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$, $g_3(e_3) = e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ より

$$R_3 = \begin{pmatrix} g_3(e_1) & g_3(e_2) & g_3(e_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

x軸まわりに回転させる場合

$g_1: x \mapsto y$

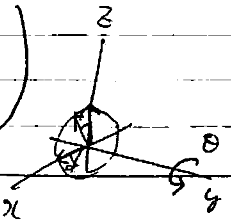
$$R_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$



y軸まわりに回転させる場合

$g_2: x \mapsto y$

$$R_2 = \begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$$



㊟ $\{g_1, g_2, g_3\}$ が
左手系の場合は
回転の向きが
変わる

§ あるベクトルを軸にして回転変換

平面Wの法線ベクトル $n = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ を規格化して

$$g_3 = \frac{n}{\|n\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

とおく。$\{g_1, g_2, g_3\}$ は

$$(g_i, g_j) = \delta_{ij} = \begin{cases}1 & (i = j)\\ 0 & (i \neq j)\end{cases}$$

をみたし，$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底となる。

さらに，$g_2 \Rightarrow -g_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ とおきかえると $\{g_1, g_2, g_3\}$ は右手系である。

㊟ $\{g_1, g_2, g_3\}$ が
この順で右手系の
正規直交基底となるように
おく

$g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, g_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ のとき

$g_1 \times g_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -\frac{n}{\sqrt{3}}$

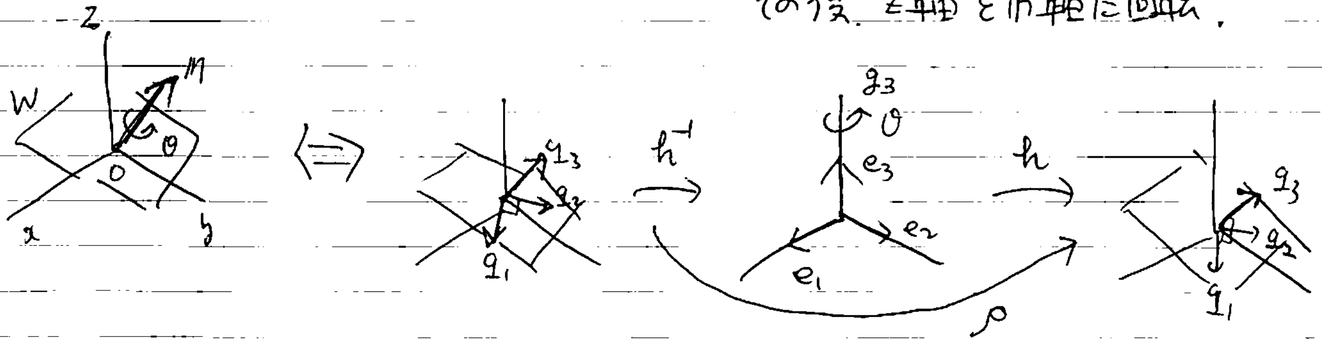
となる。

$g_1 \times (-g_2) = \frac{n}{\sqrt{3}}$ となる。

$\{g_1, -g_2, g_3\}$ が右手系である

導出1

n軸を中心に θ 回転 ⟺ n軸をz軸に回転し，
z軸を中心に θ 回転させ，
その後，z軸をn軸に回転。



$\{e_1, e_2, e_3\}$ を $\{g_1, g_2, g_3\}$ に写す変換を h とおく。

$$\begin{cases}h(e_1) = g_1\\ h(e_2) = g_2\\ h(e_3) = g_3\end{cases}$$ より

$$\begin{aligned}y = h(x) &= h(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1h(e_1) + x_2h(e_2) + x_3h(e_3)\\ &= \begin{pmatrix}h(e_1) & h(e_2) & h(e_3)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}g_1 & g_2 & g_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\\ &= Qx.\end{aligned}$$

と表される。h の表現行列は

$$Q = \begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{+2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ 0 & +2 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

である。よって，n軸を中心とする回転変換は

$$y = h(g_3(h^{-1}(x))) = \boxed{h \circ \underset{\rho}{\underline{g_3} \circ h^{-1}}}(x) = \overset{B}{\boxed{QR_3(\theta)Q^{-1}}}x = Bx \quad (= \rho(x))$$

$$B = QR_3(\theta)Q^{-1},\ \rho = h \circ g_3 \circ h^{-1}$$

となる。

§ 直交行列

㊟ $Q = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & +2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ は $Q^TQ = I$ をみたし直交行列である.

(問) $Q^TQ = I$ を示せ.

定理

$Q = (q_1, q_2 \cdots q_n)$, $(q_i, q_j) = \delta_{ij}$ は直交行列である.

(∵)

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{pmatrix}(q_1\ q_2 \cdots q_n) = \begin{pmatrix} q_1^Tq_1 & q_1^Tq_2 \cdots & q_1^Tq_n \\ q_2^Tq_1 & q_2^Tq_2 \cdots & q_2^Tq_n \\ \cdots & & \\ q_n^Tq_1 & q_n^Tq_2 \cdots & q_n^Tq_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (q_1, q_1) & (q_1, q_2) & \cdots & (q_1, q_n) \\ (q_2, q_1) & (q_2, q_2) & \cdots & (q_2, q_n) \\ \cdots & & & \\ (q_n, q_1) & (q_n, q_2) & \cdots & (q_n, q_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} = I.$$

定理

$Q^{-1} = Q^T$ (∵) $Q^TQ = I \Rightarrow Q^TQQ^{-1} = IQ^{-1}$

$\Rightarrow Q^TI = Q^{-1} \Rightarrow Q^T = Q^{-1}$

よって, $Q^{-1} = Q^T$ より n 軸を中心とする $\frac{\pi}{4}$ 回転の回転変換 $\rho: x \mapsto y$ の表現行列は,

$$B = QR_3\left(\frac{\pi}{4}\right)Q^{-1} = QR_3(\theta)Q^T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & +2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & +2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & +2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 & -2 \\ -\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 & +2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} & -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} & -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

と求まる.

問 $B^TB = I$ を示せ.

定理 直交行列の積は直交行列.

∵ $A^TA = I,\ B^TB = I$ のとき

$$(AB)^T(AB) = B^TA^TAB = B^TIB = B^TB = I.$$ □

§ 座標変換

導出 2 Bの導出の別の方法。

標準基底 $\Sigma = \{e_1, e_2, e_3\}$ における x, y の座標を $(x_1, x_2, x_3)_\Sigma,\ (y_1, y_2, y_3)_\Sigma$ とする.
また, 基底 $\Sigma' = \{g_1, g_2, g_3\}$ における x, y の座標を

$$(u_1, u_2, u_3)_{\Sigma'},\quad (v_1, v_2, v_3)_{\Sigma'}$$

とおく。このとき

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = u_1g_1 + u_2g_2 + u_3g_3$$

$$= (g_1\ g_2\ g_3)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$= Qu.$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 = v_1g_1 + v_2g_2 + v_3g_3$$

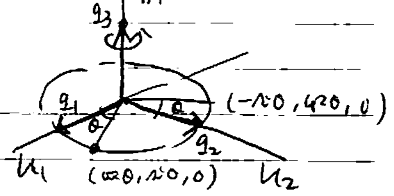
$$= (g_1\ g_2\ g_3)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$= Qv$$

と表される。$x = Qu$ を $(x_1, x_2, x_3)_\Sigma$ と $(u_1, u_2, u_3)_{\Sigma'}$ との**座標変換**とよぶ。

Σ' の座標系における n 軸の回転は

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$



と表される. つまり

$$v = R_3(\theta)u = g_3(u)$$

が成立する. よって座標変換 $u = Q^Tx,\ v = Q^Ty$ より

$$Q^Ty = R_3(\theta)Q^Tx \Longrightarrow y = \underbrace{(QR_3(\theta)Q^T)}_{B}x = Bx$$

と得られる。

No.
Date

§ ロール・ピッチ・ヨー分解

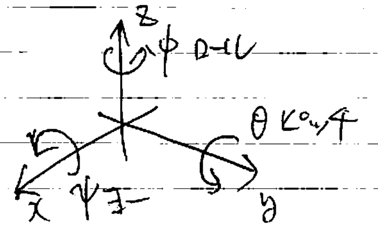
注 回転変換は正規直交基底(右手系)を正規直交基底(右手系)に写す変換.

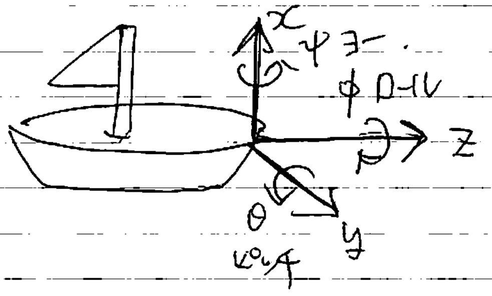
定理 任意の回転行列 R は

$$R = R_1(\psi) R_2(\theta) R_3(\phi)$$

と表される. これを<u>ロール・ピッチ・ヨー分解</u>と呼ぶ.

$$\begin{cases} \phi: \text{ロール (roll)}, \ \theta: \text{ピッチ (pitch)}, \ \psi: \text{ヨー (yaw)} \\ (\psi, \theta, \phi): \text{オイラー角 (Euler angles)} \end{cases}$$





注 $R_1(\psi)R_2(\theta) \neq R_2(\theta)R_1(\psi)$, $R_2(\theta)R_3(\phi) \neq R_3(\phi)R_2(\theta)$
$R_1(\psi)R_3(\phi) \neq R_3(\phi)R_1(\psi)$.

問 直交行列 $Q = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & +2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ をロール・ピッチ・ヨー分解せよ.

☺

$$Q = R_1(\psi)R_2(\theta)R_3(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\cos\theta\sin\phi & \sin\theta \\ \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\sin\theta\cos\phi & \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\sin\theta\sin\phi & -\sin\psi\cos\theta \\ \sin\psi\sin\phi - \cos\psi\sin\theta\cos\phi & \sin\psi\cos\phi + \cos\psi\sin\theta\sin\phi & \cos\psi\cos\theta \end{pmatrix}$$

(1,1)成分, (1,2)成分より

$$\begin{cases} \cos\theta\cos\phi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos\theta\sin\phi = \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

$\Rightarrow \tan\phi = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi = -\frac{\pi}{6}$

(2,3)成分, (3,3)成分より

$$\begin{cases} -\sin\psi\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos\psi\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$\Rightarrow \tan\psi = -1$

$\Rightarrow \psi = -\frac{\pi}{4}$

(1,3)成分, (3,3)成分より

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos\psi\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

よって、Qのオイラー角は $\begin{cases} \phi = -\frac{\pi}{6} = -30^\circ \\ \psi = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 35.3^\circ \end{cases}$ である。

∴ Qは $Q = R_1(-\frac{\pi}{4}) R_2(\theta) R_3(-\frac{\pi}{6})$ と分解される。

(注) $B = Q R_3(\frac{\pi}{4}) Q^T$ より

$$B = R_1(-\tfrac{\pi}{4})R_2(\theta)R_3(-\tfrac{\pi}{6})R_3(\tfrac{\pi}{4})\left(R_1(-\tfrac{\pi}{4})R_2(\theta)R_3(-\tfrac{\pi}{6})\right)^T$$

$$= R_1(-\tfrac{\pi}{4})R_2(\theta)R_3(-\tfrac{\pi}{6})R_3(\tfrac{\pi}{4})R_3^T(-\tfrac{\pi}{6})R_2^T(\theta)R_1^T(-\tfrac{\pi}{4})$$

$$= R_1(-\tfrac{\pi}{4})R_2(\theta)\underbrace{R_3(-\tfrac{\pi}{6})\underbrace{R_3(\tfrac{\pi}{4})R_3(+\tfrac{\pi}{6})}_{R_3(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})}}_{R_3(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}) = R_3(\frac{\pi}{4})}R_2(-\theta)R_1(+\tfrac{\pi}{4})$$

$$= R_1(-\tfrac{\pi}{4})R_2(\theta)R_3(\tfrac{\pi}{4})R_2(-\theta)R_1(\tfrac{\pi}{4})$$

と表される。Bは回転行列の積で表される。

(注) 任意の直交行列は(ロール・ピッチ・ヨー分解以外の)回転行列の積でも表される。

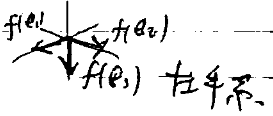
§直交変換

定義 f:直交変換 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A:直交行列

定理 正規直交基底 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \xrightarrow{f}$ 正規直交基底 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$

(∵) $A, U = (u_1\ u_2 \cdots u_n)$:直交行列 $\Rightarrow$ $V = AU$:直交行列 □

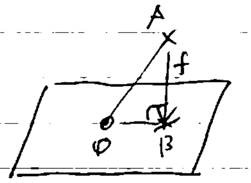
定理 直交行列は回転行列と鏡映行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の積で表される。

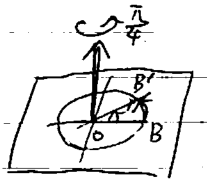


§ 回転変換の例

(例) 点 $(1,-1,2)$ $\underset{\text{正射影}}{\xrightarrow{f}}$ $\left(\frac{1}{3},-\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$ $\underset{\substack{n\text{軸まわりに}\\ \frac{\pi}{4}\text{回転}}}{\xrightarrow{\rho}}$ $\left(\frac{1-3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}},\frac{-5+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}},\frac{4+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)$

$$\because\ \boldsymbol{y}=\rho(\boldsymbol{x})=B\boldsymbol{x}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} & -1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\\ -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{3}+\sqrt{2}\\ -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} & -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2}\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1+3\sqrt{3}\\-5-\sqrt{3}\\4-2\sqrt{2}\end{pmatrix}$$





(例)

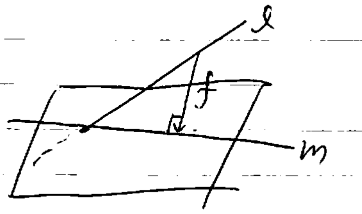
l: 直線 $\boldsymbol{x}=t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}_0$ $\underset{\text{正射影}}{\xrightarrow{f}}$ m: $\boldsymbol{x}=t\boldsymbol{b}+\boldsymbol{y}_0$ $\underset{\text{回転}}{\xrightarrow{\rho}}$ m': $\boldsymbol{x}=t\boldsymbol{c}+\boldsymbol{z}_0$

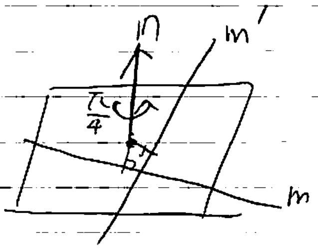
$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\\ \boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\end{cases}\qquad \begin{cases}\boldsymbol{y}_0=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7\\-8\\1\end{pmatrix}\\ \boldsymbol{b}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-7\\5\end{pmatrix}\end{cases}\qquad \begin{cases}\boldsymbol{z}_0=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}7+3\sqrt{3}\\-8+2\sqrt{3}\\1-5\sqrt{3}\end{pmatrix}=B\boldsymbol{y}_0\\ \boldsymbol{c}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2+4\sqrt{3}\\-7-\sqrt{3}\\5-3\sqrt{3}\end{pmatrix}=B\boldsymbol{c}\end{cases}$$

成分で表すと.

$$m':\ \frac{3\sqrt{2}x-7-3\sqrt{3}}{2+4\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}y+8-2\sqrt{3}}{-7-\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}z-1+5\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$$

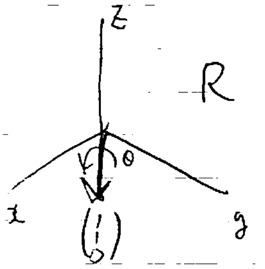
である.



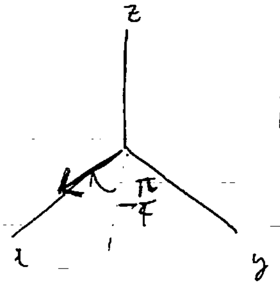


§回転変換の例

$\boxed{例}$ $\mathbb{R}^3$において，
方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ を軸とする回転変換（角度：θ）



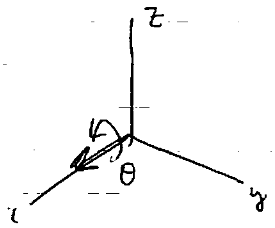
$=$



$$R_3\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0\\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

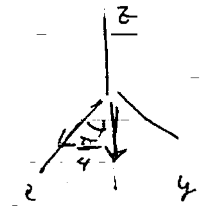
$\circ$



$$R = R_3\left(\frac{\pi}{4}\right)R_1(\theta)R_3\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

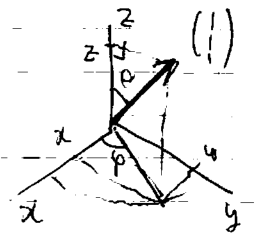
$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$\circ$



$$R_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0\\ \sin\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$\boxed{例}$ $\mathbb{R}^3$において，方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ を軸とする回転変換（角度：α）



$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\sin\theta\cos\varphi\\ r\sin\theta\sin\varphi\\ r\cos\theta\end{pmatrix}$ と極座標で表すと，次のように書ける．

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{3}\\ \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}\\ \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \tan^{-1}\sqrt{2}\end{cases}$$

$\left(\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

ここで，$Q^T = R_2(-\theta)R_3(-\varphi)$ とおく．
このとき
$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = Q^T\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ が成り立つ．

$\Leftrightarrow$ $Q = R_3(\varphi)R_2(\theta)$ とおく．
$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

よって，$R = QR_3(\alpha)Q^T = R_3(\varphi)R_2(\theta)R_3(\alpha)R_2(-\theta)R_3(-\varphi)$ となる．

ただし，$R_3(\varphi) = R_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$，　$R_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 0 & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ -\sqrt{2} & 0 & 1\end{pmatrix}$，　$R_3(\alpha) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$R_3(-\varphi) = R_3\left(-\frac{\pi}{4}\right) = R_3(\varphi)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$，　$R_2(-\theta) = R_2(\theta)^T = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ \sqrt{2} & 0 & 1\end{pmatrix}$

力学系への応用

§ 力学系

力学系 (dynamical system)

$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, t：時間, $x \in \mathbb{R}^n$, $x = x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

$f(t, x)$ … tが陽に表れる場合を非自励系という (nonautonomous)

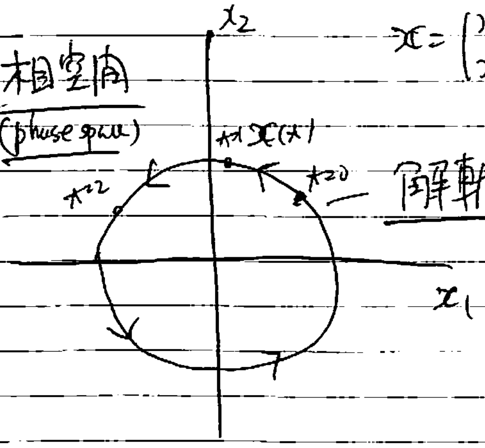
$f(x)$ … tが陽に表れない場合を自励系という (autonomous)

$f(x) = Ax + b$ … 非同次線形 (inhomogeneous)

$f(x) = Ax$ … 同次線形 (homogeneous)

相空間 (phase space)

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$



解軌道 (orbit, trajector)

No.

Date.

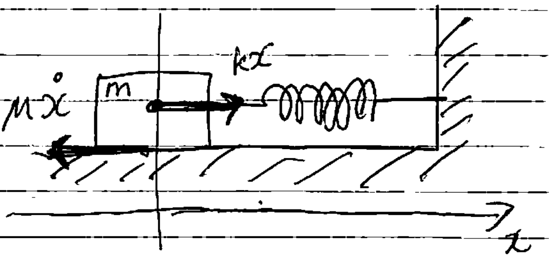
§ 力学系の例

(線形バネの振動)

$\boxed{例}$ 運動方程式

$$m\frac{d^2x^2}{dt^2} = kx - \mu\frac{dx}{dt}.$$

m : 質量
k : バネ定数
μ : 動まさつ係数



速度 $v = \frac{dx}{dt}$ とおくと.

$$m\frac{dv}{dt} = kx - \mu v$$

となるので, 連立すると.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}x - \frac{\mu}{m}v \end{cases}$$

である ここでは

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

とおくと.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{k}{m}x - \frac{\mu}{m}v \end{pmatrix}$$

$$= \overset{A}{\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix}}}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

と表されるから.

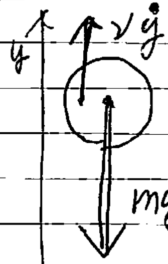
$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

と書ける. 同次線形自励系の力学系である。

$\boxed{例}$ (自由落下運動)

運動方程式

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + \nu\frac{dy}{dt}.$$



m : 質量
g : 重力加速度

速度 $v = \frac{dy}{dt}$ とおくと.

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + \nu v$$

より

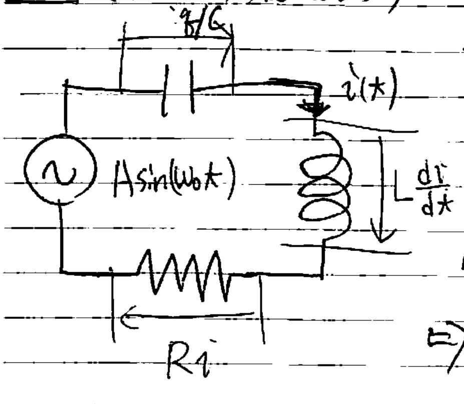
$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = \frac{\nu}{m}v + g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{\nu}{m} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

と書ける. 非同次線形自励系.

$\boxed{例}$ (RLC直流回路)



電流 $i(t) = \frac{dq}{dt}$
Cの電荷 $q(t)$

キルヒホッフの電圧則.

$$A\sin(\omega_0 t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

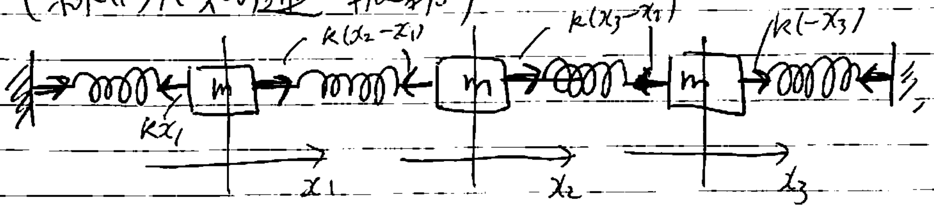
$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \left(-\frac{R}{L}\right)i + \left(-\frac{1}{LC}\right)q + \left(\frac{A}{L}\right)\sin(\omega_0 t)$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} i \\ q \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\overset{=\mathbf{x}}{\begin{pmatrix} i \\ q \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{A}{L}\sin\omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

非同次線形非自励系

$\boxed{例}$（線形バネの連 振動）



3つの運動方程式

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = k(x_2 = x_1) - kx_1 \quad = k(x_2 - 2x_1) \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = k(x_3 - x_2) - k(x_2 - x_1) = k(x_3 - 2x_2 + x_1) \\ m\dfrac{d^2x_3}{dt^2} = k(-x_3) = k(x_3 - x_2) \quad = k(-2x_3 + x_2) \end{cases}$$

速度 $v_1 = \dot{x}_1$, $v_2 = \dot{x}_2$, $v_3 = \dot{x}_3$ とおく。

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{x}} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{=A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{x}}$$

$\Longrightarrow \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$. 同次線形自励.

§ 行列, ベクトルの微分

$\boxed{定義}$ $$\frac{d}{dt}A \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \cdots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{da_{m1}}{dt} & & \cdots & \frac{da_{mn}}{dt} \end{pmatrix}$$

特にn×1型のとき $$\frac{d}{dt}x = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$$

$\boxed{定理}$ $$\frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}$$

(∵) $AB = C = (c_{ij})$, $c_{ij} = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}b_{kj}$ より

$$\frac{dc_{ij}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_k a_{ik}b_{kj} = \sum_k \dot{a}_{ik}b_{kj} + a_{ik}\dot{b}_{kj}$$ 図.

$\boxed{定理}$ $$\frac{d}{dt}(A^{-1}) = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$$

(∵) $I = A^{-1}A$ を両辺微分すると.

$$0 = \frac{dA^{-1}}{dt}A + A^{-1}\frac{dA}{dt} \Rightarrow \frac{dA^{-1}}{dt}A = -A^{-1}\frac{dA}{dt} \Rightarrow \frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$$ 図

$\boxed{例}$ $$y = Ax \Rightarrow \dot{y} = \dot{A}x + A\dot{x}$$

§ 同次線形自励系の一般解

力学系 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$n=1$ のとき $\boldsymbol{x}=(x)$, $A=(a)$ とおくと.

$$\frac{dx}{dt} = ax.$$

この一般解は

$$x(t) = e^{at}x(0)$$

と得られる。よって一般の n のとき,

$$\boldsymbol{x}(t) = B(t)\boldsymbol{x}(0), \quad B \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

と一般解を仮定する。これを $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ へ代入すると,

$$(\text{左辺}) = \frac{d}{dt}\left(B(t)\boldsymbol{x}(0)\right) = \frac{dB(t)}{dt}\boldsymbol{x}(0) + B(t)\underbrace{\boxed{\frac{d\boldsymbol{x}(0)}{dt}}}_{0} = \frac{dB(t)}{dt}\boldsymbol{x}(0) = \dot{B}\boldsymbol{x}(0)$$

$$(\text{右辺}) = A\boldsymbol{x} = AB\boldsymbol{x}(0)$$

$$\Longrightarrow \dot{B}\boldsymbol{x}(0) = AB\boldsymbol{x}(0) \Longrightarrow \dot{B} = AB.$$

となる。$\dot{B} = AB$ をみたす B がみつかれば解が得られる。

ここで,

$$B(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n$$

とおく。このとき

$$\dot{B} = \frac{d}{dt}\left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots\right) = 0 + 1A + \frac{2}{2}tA^2 + \frac{3}{3!}t^2A^3 + \frac{4}{4!}t^4A^4 + \cdots$$

$$= A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \frac{t^3}{3!}A^4 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \cdots \qquad \cdots + \frac{n}{n!}t^{n-1}A^n + \cdots$$

$$= A\left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1} + \cdots\right)$$

$$= A\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n\right) = AB.$$

が成り立つ。よって、この B は $\dot{B} = AB$ をみたす。B を

$$\boxed{B(t) = e^{tA}}$$

と書くことにする。

No.
Date.

一般解は

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}(0)$$

と表される。

非同次の場合は 定数変化法を用いて 解を

$$\left(\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\right)$$

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}C(t)$$

と仮定する. $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ へ代入すると.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}C\right) = \frac{de^{tA}}{dt}C + e^{tA}\frac{dC}{dt} = A\underset{\shortparallel}{\boxed{e^{tA}C}} + e^{tA}\dot{C} = \cancel{A\boldsymbol{x}} + e^{tA}\dot{C} = \cancel{A\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow e^{tA}\dot{C} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \dot{C} = \left(e^{tA}\right)^{-1}\boldsymbol{b} \overset{x}{=} e^{-tA}\boldsymbol{b}$$

$$\Rightarrow \dot{C} = e^{-tA}\boldsymbol{b} \Rightarrow C(t) = \int^{t} e^{-tA}\boldsymbol{b}\,dt.$$

となる. よって

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}C(t), \quad C(t) = \int^{t} e^{-tA}\boldsymbol{b}\,dt.$$

と書ける.

§ 固有値分解

固有方程式 (eigen-equation)　$Ax = \lambda x,\ x \neq 0$

$\begin{cases} \lambda : \text{固有値 (eigen value)} \\ x : \lambda \text{に属する固有ベクトル (eigen-vector)} \end{cases}$

固有空間 (eigen-space)　$W(\lambda) = \{ x \mid Ax = \lambda x \}$

固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とその固有ベクトル $p_1, \cdots, p_n$ に対して

$$\begin{cases} Ap_1 = \lambda_1 p_1 \\ Ap_2 = \lambda_2 p_2 \\ \vdots \\ Ap_n = \lambda_n p_n \end{cases} \Rightarrow (Ap_1\ Ap_2\ \cdots\ Ap_n) = (\lambda_1 p_1\ \lambda_2 p_2\ \cdots\ \lambda_n p_n)$$

$$\Rightarrow A \overbrace{(p_1\ p_2\ \cdots\ p_n)}^{P} = \overbrace{(p_1\ p_2\ \cdots\ p_n)}^{P} \overbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}}^{=D}$$

$$\Rightarrow AP = PD.$$

が成立する。P が正則 (regular) のとき ($\{p_1, \cdots, p_n\}$ が1次独立なとき)

$$\Rightarrow P^{-1}AP = P^{-1}PD \Rightarrow D = P^{-1}AP$$

と書ける。A から D への変換

$$D = P^{-1}AP$$

を対角化という。左から P 右から P^{-1} をかけて、

$$A = PDP^{-1}$$

を A の 固有値分解 (eigen decomposition) という。

定理　A が対角化可能なとき $A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & \ddots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$

$\because$ $A^k = (PD\underbrace{P^{-1})(P}_{I}D\underbrace{P^{-1})}_{I}\cdots\underbrace{(P}_{I}DP^{-1}) = P\underbrace{DD\cdots D}_{k}P^{-1} = PD^kP^{-1}$. □

No.

Date.

§ 一般解の固有値分解

力学系 $\dot{x} = Ax$ の一般解は $x(t) = e^{tA}x(0)$ である.
ここに 固有値分解 $A = PDP^{-1}$ を代入すると

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} PD^nP^{-1} = P\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n\right)P^{-1} = Pe^{tD}P^{-1}$$

と書ける. また,

$$e^{tD} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & 0 \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_1)^n}{n!} & & & 0 \\ & \sum_n \frac{(t\lambda_2)^n}{n!} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sum_n \frac{(t\lambda_N)^n}{n!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_N t} \end{pmatrix}$$

とも書ける. よって 一般解は A が対角化可能なとき,

$$x(t) = Pe^{tD}P^{-1}\cancel{x(0)} = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_N t} \end{pmatrix}P^{-1}x(0), \quad P = (p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_N)$$

と表される。さらに書きかえて

$$\boxed{\underbrace{P^{-1}x(t)}_{y(t)}} = e^{tD}\boxed{\underbrace{P^{-1}x(0)}_{y(0)}} \Longrightarrow y(t) = e^{tD}y(0)$$

となる. $y = P^{-1}x$ は

座標　基底

$$x = Py \Longrightarrow x = (p_1 \ p_2 \cdots p_N)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \Longrightarrow x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_N e_N$$

$$= y_1 p_1 + y_2 p_2 + \cdots + y_N p_N$$

基底

座標

と表されるので $x \mapsto y$ は標準基底 $\Sigma = \{e_1, \cdots, e_N\}$ の座標 $(x_1, \cdots, x_N)_\Sigma$ から基底 $\Sigma' = \{p_1, \cdots, p_N\}$ の座標 $(y_1, \cdots, y_N)_{\Sigma'}$ への座標変換とみなされる.

基底 Σ' における座標系では. 力学系は $y(t) = e^{tD}y(0)$ より

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1(0) \\ y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_2(0) \\ \vdots \\ y_N(t) = e^{\lambda_N t} y_N(0) \end{cases}$$

と書ける。これで解軌道を描き, 座標変換 $x = Py$ で $(x_1, \ldots, x_N)_\Sigma$ の解軌道に変換すればよい

§実固有値の場合

例

$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$, $x = x(t)$

$\dot{x} = v$ とおくと.

$$\begin{cases}\dot{x} = v \\ \dot{v} = 3v - 2x\end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix}}}_{\mathbf{x}} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}.$$

と書ける. Aの固有値, 固有ベクトル, 固有空間を求める.

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix}0-\lambda & 1\\ -2 & 3-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda)+2$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2) \Rightarrow \lambda = 1, 2.$$

固有値は $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ である。それぞれ固有方程式 $A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$, $A\mathbf{x} = \lambda_2\mathbf{x}$ を解く

$\lambda = \lambda_1 = 1$ のとき

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x} \Rightarrow (A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad A - I = \begin{pmatrix}0-1 & 1\\ -2 & 3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$A - I \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ より } \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow x - v = 0 \Rightarrow x = v.$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix} = c\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_1} = c\mathbf{p}_1 \quad (\forall c \in \mathbb{R})$$

固有空間は $W(\lambda_1) = W(1) = \langle \mathbf{p}_1 \rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

$\lambda = \lambda_2 = 2$ のとき

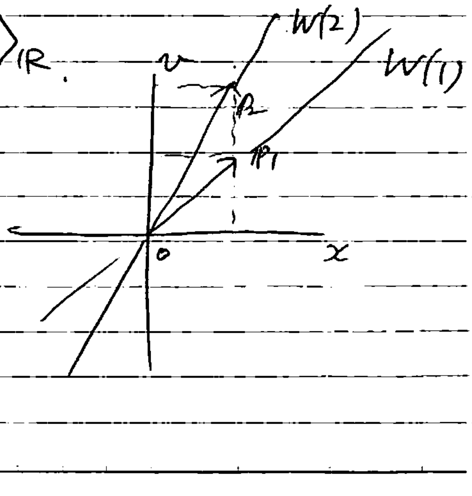
$A\mathbf{x} = 2\mathbf{x} \Rightarrow (A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解く.

$$A - 2I = \begin{pmatrix}0-2 & 1\\ -2 & 3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ より } x - \frac{v}{2} = 0$$

$$\Rightarrow v = 2x$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix}x\\2x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\2c\end{pmatrix} = c\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_2} = c\mathbf{p}_2 \quad (\forall c \in \mathbb{R})$$

固有空間は $W(\lambda_2) = W(2) = \langle \mathbf{p}_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$.



$P = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ とおく.

$|P| = \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$ より P は正則であり,
A は対角化可能である. よって

$$D = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

と書ける.

力学系 $\dot{x} = Ax$ の一般解 $x = e^{tA}x(0)$ は

$$x = e^{tA}x(0) = e^{tPDP^{-1}}x(0) = Pe^{tD}P^{-1}x(0) \Rightarrow P^{-1}x(t) = e^{tD}P^{-1}x(0)$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{tD}y(0)$$

と書ける。$y = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$ とおくと、　　ただし、$x = Py$

$$y(t) = e^{tD}y(0) \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = e^{\lambda_1 t} x_0 \\ \tilde{v} = e^{\lambda_2 t} v_0 \end{cases}$$

と表される。$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ より

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{x} = e^{t}\tilde{x}_0 \\ \tilde{v} = e^{2t}\tilde{x}_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \tilde{x}^2 = e^{2t}\tilde{x}_0^2 \\ \tilde{v} = e^{2t}\tilde{v}_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\tilde{v}}{\tilde{x}^2} = \frac{\tilde{v}_0}{\tilde{x}_0^2} \Rightarrow \underbrace{\tilde{v} = \left(\frac{\tilde{v}_0}{\tilde{x}_0^2}\right)\tilde{x}^2}_{放物線}$$

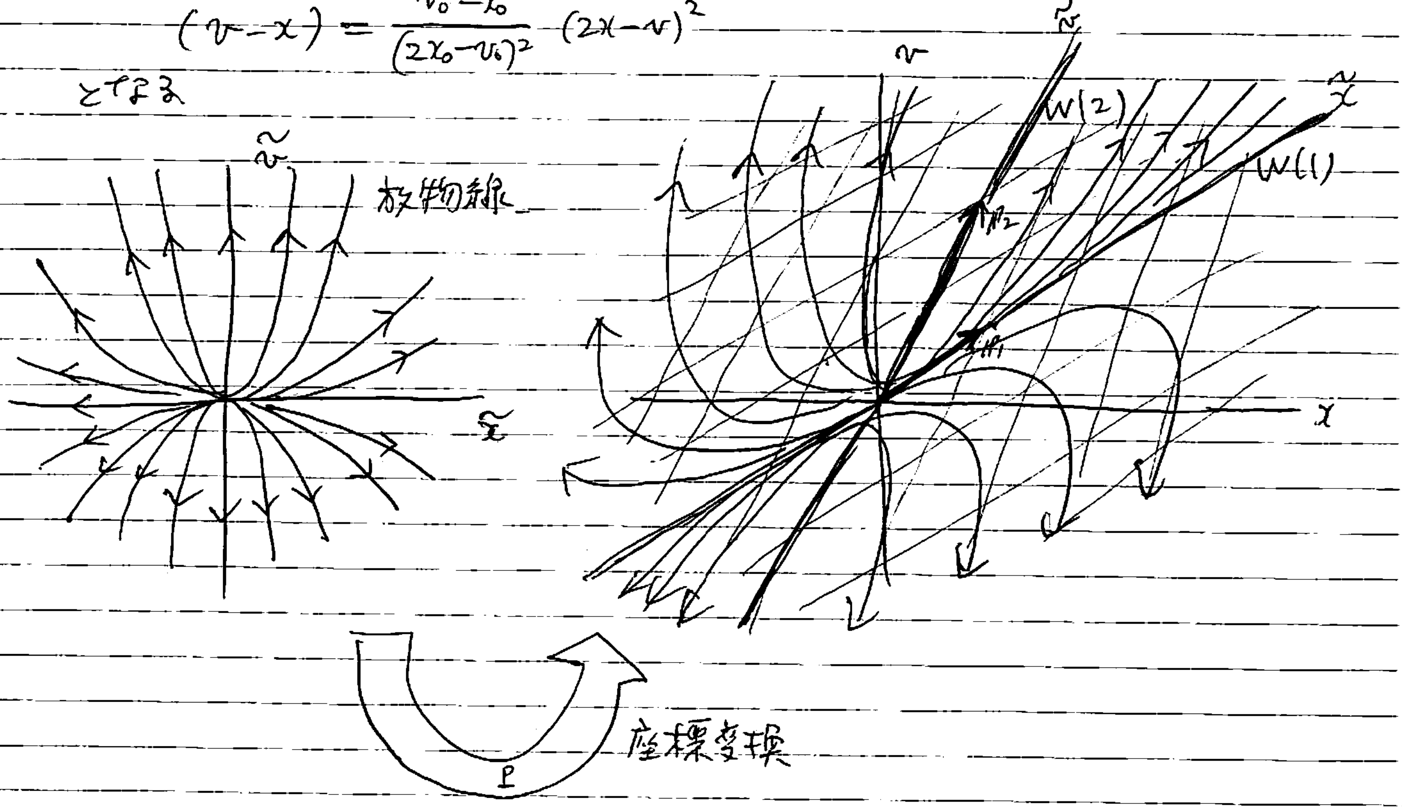
となる。座標変換

$$y = P^{-1}x \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - v \\ v - x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = 2x - v \\ \tilde{v} = v - x \end{cases}$$

より、解軌道は

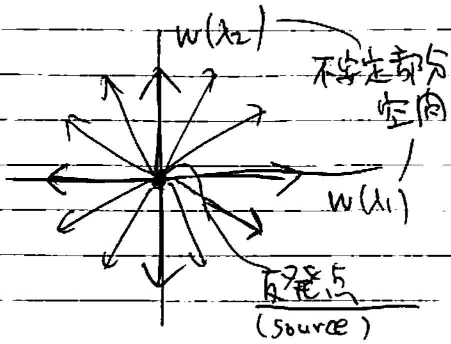
$$(v - x) = \frac{v_0 - x_0}{(2x_0 - v_0)^2}(2x - v)^2$$

となる

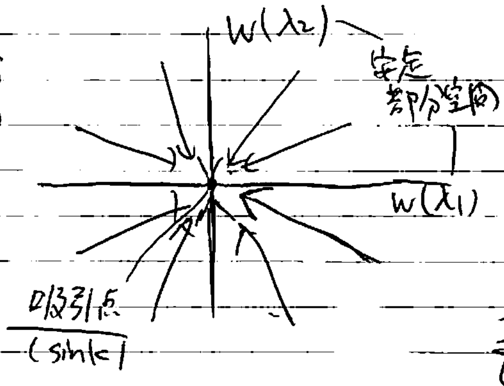


一般に

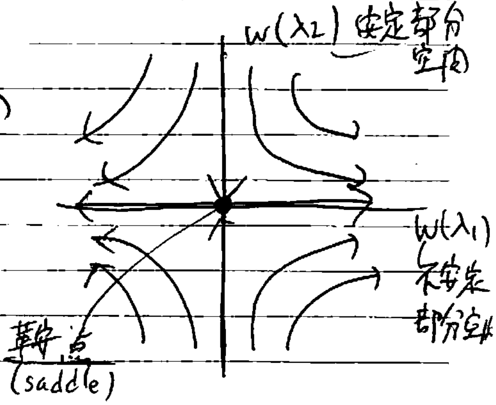
$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$



$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$



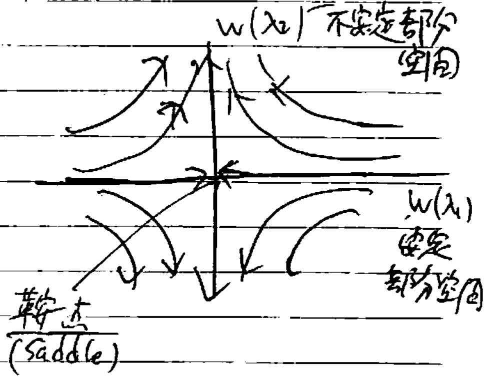
$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$



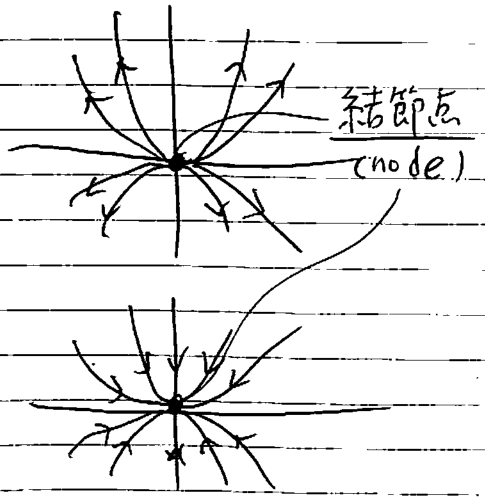
$\lambda > 0$ のとき $W(\lambda)$：不安定部分空間 (unstable subspace)

$\lambda < 0$ のとき $W(\lambda)$ 安定部分空間 (stable subspace)

$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$



特に $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$



§ 複素固有値の場合

例1 $\ddot{x}+2\dot{x}+5x=0.$

速度 $v=\dot{x}$ とおく。

$$\begin{cases}\dot{x}=v\\ \dot{v}=-5x-2v\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\\ -5x-2v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\ -5&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ v\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\mathbb{x}=A\mathbb{x}.$$

Aの固有値は

$$0=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}0-\lambda&1\\ -5&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-\lambda(-2-\lambda)+5=\lambda^2+2\lambda+5$$

$$\Rightarrow \lambda=-1\pm2i.$$

と求まる。

$$\begin{cases}\lambda_1=-1+2i\\ \lambda_2=-1-2i\end{cases}$$

とおく。$\lambda_2=\overline{\lambda_1}$ であることに注意する。

λ_1の固有ベクトルは $A\mathbb{x}=\lambda_1\mathbb{x}$ より

$$A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix}0-\lambda_1&1\\ -5&-2-\lambda_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2i&1\\ -5&-1-2i\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}5&1+2i\\ 5&1+2i\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}5&1+2i\\ 0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 5x+(1+2i)v=0$$

$$\Rightarrow \mathbb{x}=\begin{pmatrix}x\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+2i}{5}c\\ c\end{pmatrix}=\frac{c}{5}\begin{pmatrix}1+2i\\ 5\end{pmatrix}=\frac{c}{5}\mathbb{p}_1.$$

ここで

$$A\mathbb{p}_1=\lambda_1\mathbb{p}_1 \Rightarrow \overline{A\mathbb{p}_1}=\overline{\lambda_1\mathbb{p}_1}$$

$$\Rightarrow \overline{A}\,\overline{\mathbb{p}_1}=\overline{\lambda_1}\,\overline{\mathbb{p}_1} \Rightarrow A\overline{\mathbb{p}_1}=\lambda_2\overline{\mathbb{p}_1}$$

より λ_2 の固有ベクトルは $\mathbb{p}_2=\overline{\mathbb{p}_1}$ である。

よって、Aは

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\ 0&\overline{\lambda_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2i&0\\ 0&1-2i\end{pmatrix}=P^{-1}AP$$

$$P=(\mathbb{p}_1\ \overline{\mathbb{p}_1})=\begin{pmatrix}1+2i&1-2i\\ 5&5\end{pmatrix}$$

と対角化可能である。

$\dot{\mathbb{x}}=A\mathbb{x}$の一般解は

$$\mathbb{x}(t)=e^{tA}\mathbb{x}(0)=e^{tPDP^{-1}}\mathbb{x}(0)=Pe^{tD}P^{-1}\mathbb{x}(0).$$

と表される。$\lambda_1=\alpha+i\omega$, $\lambda_2=\alpha-i\omega$ とおくと、

$$e^{tD}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}&0\\ 0&e^{\overline{\lambda_1}t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\alpha t}e^{i\omega t}&0\\ 0&e^{\alpha t}e^{-i\omega t}\end{pmatrix}$$

$$=e^{\alpha t}\begin{pmatrix}e^{i\omega t}&0\\ 0&e^{-i\omega t}\end{pmatrix}\qquad \begin{cases}\alpha=\mathrm{Re}(\lambda_1)=\frac{\lambda_1+\overline{\lambda_1}}{2}\\ \omega=\mathrm{Im}(\lambda_1)=\frac{\lambda_1-\overline{\lambda_1}}{2i}\end{cases}$$

$$=e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)&0\\ 0&\cos(\omega t)-i\sin(\omega t)\end{pmatrix}$$

と表される。さらに、

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2i}&\frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2i}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i&-i\\ 1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta+i\sin\theta&0\\ 0&\cos\theta-i\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S'R(\theta)S^{-1}=\begin{pmatrix}e^{i\theta}&0\\ 0&e^{-i\theta}\end{pmatrix}$$

と書ける。

よって、

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t} P S R(\omega t) S^{-1} P^{-1} \mathbf{x}(0) = e^{\alpha t}(PS) R(\omega t)(PS)^{-1}\mathbf{x}(0)$$

となる。

$$PS = (\mathbf{p}_1\ \overline{\mathbf{p}_1})\begin{pmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2i} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{p}_1-\overline{\mathbf{p}_1}}{2i} & \frac{\mathbf{p}_1+\overline{\mathbf{p}_1}}{2} \end{pmatrix} = (\underset{\mathbf{q}_1}{\boxed{\mathrm{Im}(\mathbf{p}_1)}}\ \ \underset{\mathbf{r}_1}{\boxed{\mathrm{Re}(\mathbf{p}_1)}}) = (\mathbf{q}\ \ \mathbf{r}) = Q$$

とおくと。

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t} Q R(\omega t) Q^{-1}\mathbf{x}(0).$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\boxed{Q^{-1}\mathbf{x}(t)}}_{\mathbf{y}(t)} = e^{\alpha t} R(\omega t) \underbrace{\boxed{Q^{-1}\mathbf{x}(0)}}_{\mathbf{y}(0)}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{y}(t) = e^{\alpha t} R(\omega t)\mathbf{y}(0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = e^{\alpha t}(y_1(0)\cos\omega t + y_2(0)\sin\omega t) \\ y_2(t) = e^{\alpha}(y_1(0)\sin\omega t + y_2(0)\cos\omega t) \end{cases}$$

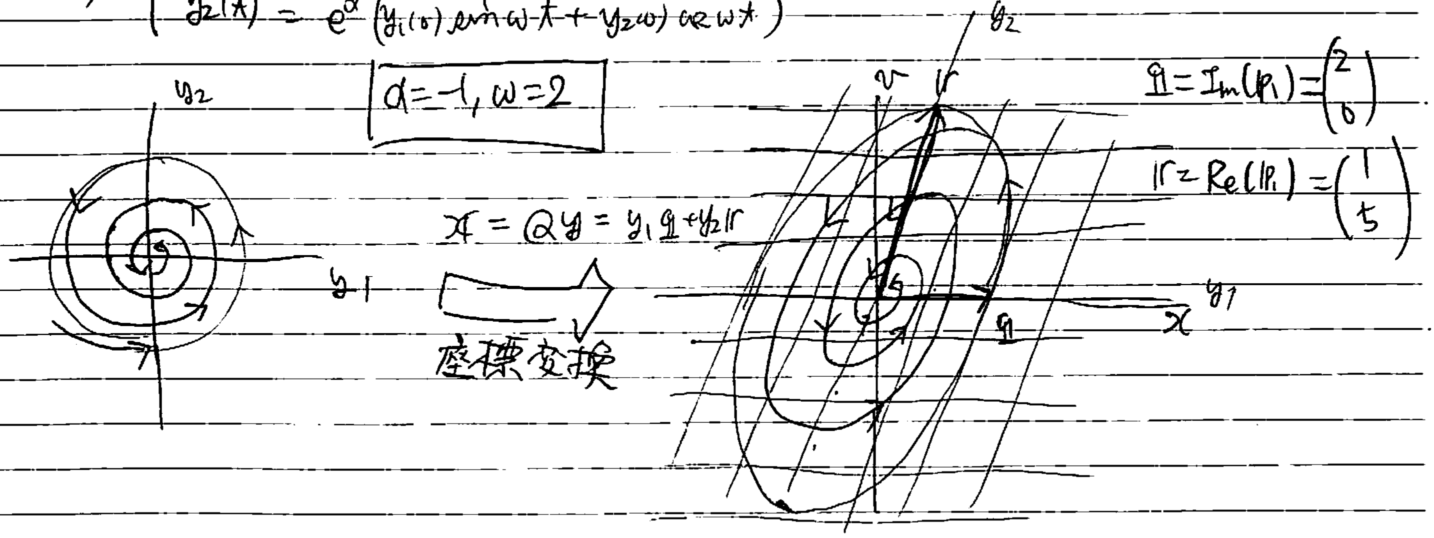
注 $z \in \mathbb{C} \ni z = x+iy$

zの実部 $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$= \frac{(x+iy)+(x-iy)}{2} = x.$

zの虚部 $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

$= \frac{(x+iy)-(x-iy)}{2i} = y.$

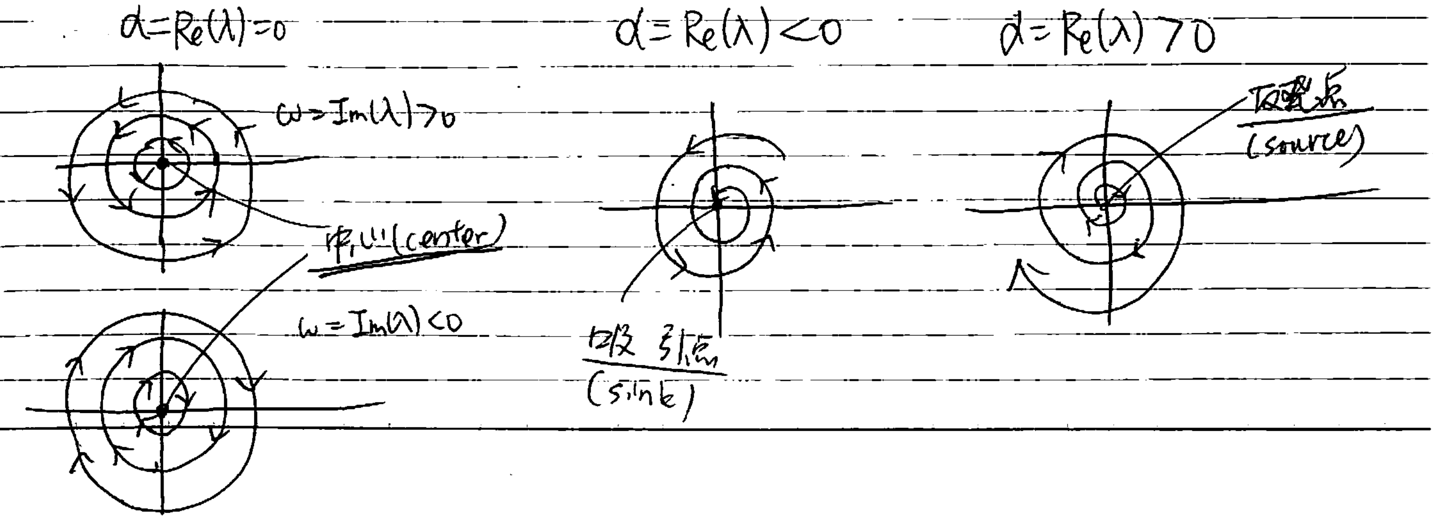


$\boxed{\alpha = -1, \omega = 2}$

$\mathbf{q} = \mathrm{Im}(\mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{r} = \mathrm{Re}(\mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

一般に.



No.
Date.

§ 重複固有値の場合

例1

$\ddot{x}-2\dot{x}+x=0$

$v=\dot{x}$ とおくと.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}.$

と書ける。Aの固有値は

$$0=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}0-\lambda&1\\-1&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$=-\lambda(2-\lambda)+1$

$=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$

より

$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=1$ (2重)

となる. $\lambda=1$ の固有ベクトルは

$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ より

$$(A-I)=\begin{pmatrix}0-1&1\\-1&2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

となるから. $x-v=0 \Rightarrow x=v$

よって.

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix}=c\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}}_{\boldsymbol{p}_1}=c\boldsymbol{p}_1$$

得られる. $\lambda=1$ の固有空間は.

$$W(1)=\langle\boldsymbol{p}_1\rangle_{\mathbb{R}}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{R}}$$

であり 1次元となる.

Aは対角化できない.

Aをジョルダン分解する.

§ ジョルダン分解

一般固有空間を

$$W_m=\{\boldsymbol{x}\mid(A-\lambda I)^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

とおく. すると.

$(A-\lambda I)\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{p}_1\in W_1(\lambda)$

である. 次に

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}_1$$

を解く.

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix}2-1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

拡大係数行列を簡約化して.

$$\left(\begin{array}{cc:c}1&-1&1\\1&-1&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc:c}1&-1&1\\0&0&0\end{array}\right)$$

である. これより $x-v=1$ となるので

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+v\\v\end{pmatrix}=\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}}_{\boldsymbol{p}_2}+c\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}}_{\boldsymbol{p}_1}$$

$=\boldsymbol{p}_2+c\boldsymbol{p}_1$

を得る. $\boldsymbol{p}_2$ は

$(A-\lambda I)\boldsymbol{p}_2\neq\boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{p}_2\notin W_1(\lambda)$

$$(A-\lambda I)^2\boldsymbol{p}_2=(A-\lambda I)\underbrace{\boxed{(A-\lambda I)\boldsymbol{p}_2}}_{\boldsymbol{p}_1}$$

$$=\underbrace{\boxed{(A-\lambda I)\boldsymbol{p}_1}}_{\boldsymbol{0}}$$

$=\boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \boldsymbol{p}_2\in W_2(\lambda)$

をみたす. よって.

$$\begin{cases}A\boldsymbol{p}_1=\lambda\boldsymbol{p}_1\\A\boldsymbol{p}_2=\lambda\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_1\end{cases}\quad\begin{cases}\boldsymbol{p}_1\in W_1(\lambda)\\\boldsymbol{p}_2\notin W_1(\lambda),\ \boldsymbol{p}_2\in W_2(\lambda)\end{cases}$$

$\Rightarrow (A\boldsymbol{p}_1\ \ A\boldsymbol{p}_2)=(\lambda\boldsymbol{p}_1\ \ \lambda\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_1)$

$$\Rightarrow A\underbrace{\boxed{(\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2)}}_{P}=\underbrace{\boxed{(\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2)}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}}_{J}$$

$\Rightarrow AP=PJ.$ が成立する.

$|\boldsymbol{P}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ より

$\boldsymbol{P}$は正則なので

$$A = \boldsymbol{P} J \boldsymbol{P}^{-1}$$

が成り立つ. これをジョルダン分解という.

Jをジョルダンブロックという.
細胞(cell)

一般にジョルダンブロック

$$J = \left.\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}\right\} m$$

は.　　⓪示せ.

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & & & \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & & \\ & & \lambda^k & & \\ & & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & & \lambda^k \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} J^0 = I, \\ J^1 = J' \\ k = 1, 2, \cdots \end{matrix}$$

が成立する. これを用いると.
$\dot{x} = Ax$の一般解は

$$x = e^{tA} x(0) = e^{t\boldsymbol{P}J\boldsymbol{P}^{-1}} x(0)$$
$$= \boldsymbol{P} e^{tJ} \boldsymbol{P}^{-1} x(0)$$

と書ける. ここで e^{tJ} は.

$λ$はAのm重固有値.
一般固有空間

$$W_m(\lambda) = \{ x \mid (A - \lambda I)^m x = 0 \}$$

$$\begin{cases} A\boldsymbol{p}_1 = \lambda \boldsymbol{p}_1 \\ A\boldsymbol{p}_2 = \lambda \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_1 \\ A\boldsymbol{p}_3 = \lambda \boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_2 \\ \quad \vdots \\ A\boldsymbol{p}_m = \lambda \boldsymbol{p}_m + \boldsymbol{p}_{m-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{p}_1 \in W_1(\lambda) \\ \boldsymbol{p}_2 \notin W_1(\lambda), \ \boldsymbol{p}_2 \in W_2(\lambda) \\ \boldsymbol{p}_3 \notin W_1(\lambda), \ \boldsymbol{p}_3 \notin W_2(\lambda), \ \boldsymbol{p}_3 \in W_3(\lambda) \\ \cdots \\ \boldsymbol{p}_m \notin W_1(\lambda), \ \boldsymbol{p}_m \notin W_2(\lambda), \cdots \\ \quad \cdots, \ \boldsymbol{p}_m \notin W_{m-1}(\lambda), \ \boldsymbol{p}_m \in W_m(\lambda) \end{cases}$$

$$(A\boldsymbol{p}_1 \ A\boldsymbol{p}_2 \cdots A\boldsymbol{p}_m) = (\lambda\boldsymbol{p}_1 \ \ \lambda\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \lambda\boldsymbol{p}_m + \boldsymbol{p}_{m-1})$$

$$\Rightarrow A(\boldsymbol{p}_1 \ \boldsymbol{p}_2 \cdots \boldsymbol{p}_m) = (\boldsymbol{p}_1 \ \boldsymbol{p}_2 \cdots \boldsymbol{p}_m) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}J.$$

$$\Rightarrow A = \boldsymbol{P}J\boldsymbol{P}^{-1}$$

$\Rightarrow J = \boldsymbol{P}^{-1}A\boldsymbol{P}$: ジョルダン標準形
(Jordan canonical form)

$$e^{tJ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} J^n = \begin{pmatrix} \overset{①}{\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^n}{n!}}} & \overset{②}{\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot t^n \lambda^{n-1}}{n!}}} & & \\ & \boxed{①} & \boxed{②} & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & & \\ & \boxed{①} & \boxed{②} & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$② = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n t^n \lambda^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t(t\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} + \overset{n=0のとき}{0}$$

$$= 0 + t\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = t\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = te^{\lambda t}.$$

と表される.

$x = Pe^{tJ}P^{-1}x(0)$ より

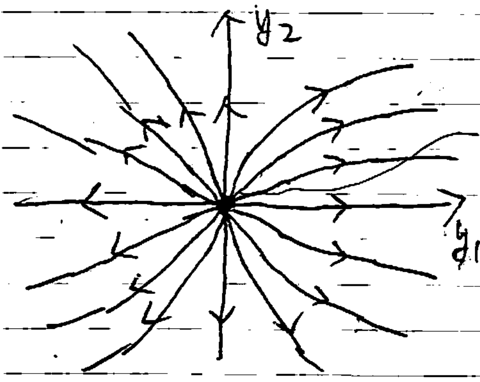
$$\underbrace{\boxed{P^{-1}x}}_{y} = e^{tJ}\underbrace{\boxed{P^{-1}x(0)}}_{y(0)}$$

$\Rightarrow y = e^{tJ}y(0)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{\lambda t}y_1(0) + te^{\lambda t}y_2(0) \\ y_2 = e^{\lambda t}y_2(0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_1(0)}{y_2(0)} + t.$$



退化結節点

反発点
(source)

$y_1 = (C+t)y_2$ ← 傾きがC+tの直線.
傾きが時間とともに増大するので放物線のような形となる.

ただし, $C = \frac{y_1(0)}{y_2(0)}$

$$y = P^{-1}x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}x = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}x$$

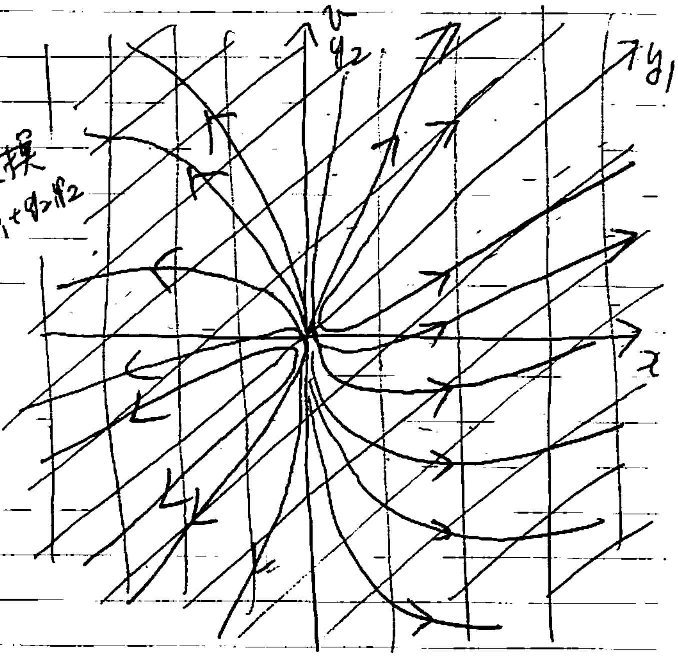
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ x-v \end{pmatrix} \text{ より}$$

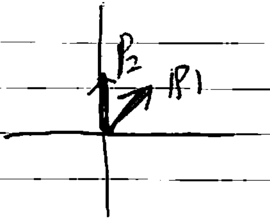
$$\frac{v}{x-v} = \left(\frac{v(0)}{x(0)-v(0)}\right)^{=C} + t.$$

$$\Rightarrow \frac{x}{v} - 1 = \frac{1}{C+t} \Leftrightarrow \frac{x}{v} = 1 + \frac{1}{C+t} = \frac{C+1+t}{C+t}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v = \frac{C+t}{C+1+t}x.}$$

座標変換
$x = y_1 p_1 + y_2 p_2$
⟹





§ 平衡点

固有空間 (eigen-space)　$W(\lambda)=\{x \mid Ax=\lambda x\}$

Re(λ) < 0 のとき 安定部分空間 (stable subspace)　$W_s(\lambda)$

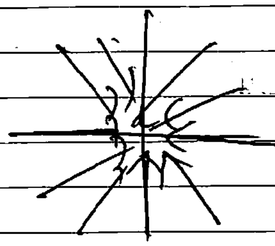
Re(λ) > 0 のとき 不安定部分空間 (unstable subspace)　$W_u(\lambda)$

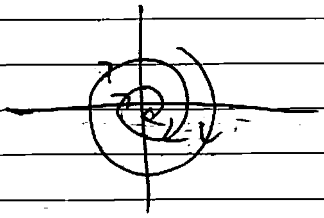
Re(λ) = 0 のとき 中心部分空間 (center subspace)　$W_c(\lambda)$

平衡点 (equibria)　$\frac{dx^*}{dt}=0$ の点, $\iff Ax^*=0$ の点,

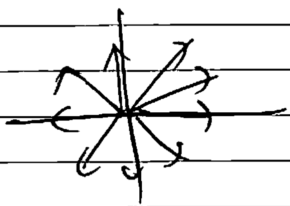
$\iff \mathrm{Ker}(A)=\{x \mid Ax=0\}\ni x^*$

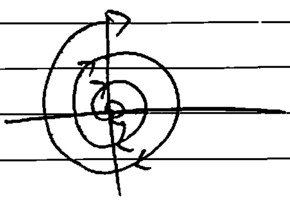
(i) $x^*\in W_s(\lambda_1)$, $x^*\in W_s(\lambda_2)$, $\cdots$　全て安定部分空間に含まれるとき、
x^*は吸引点 (sink)



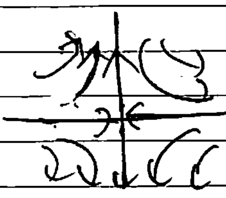


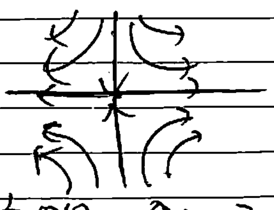
(ii) $x^*\in W_u(\lambda_1)$, $x^*\in W_u(\lambda_2)$, $\cdots$　全て不安定部分空間に含まれるとき、
x^*は反発点 (source).



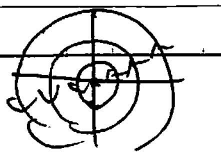


(iii) $x^*\in W_s(\lambda_1)$, $x^*\in W_u(\lambda_2)$, $\cdots$　安定と不安定部分空間に含まれるとき、
x^*は鞍点 (saddle)





(iv) $x^*\in W_c(\lambda_1)$, $\cdots$　中心部分空間に含まれるとき
x^*は中心 (center).



No.
Date.

§離散力学系

前進差分 $\frac{dx}{dt} \simeq \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$
（オイラー差分）

後退差分 $\frac{dx}{dt} \simeq \frac{x(t) - x(t+h)}{h}$

中心差分 $\frac{dx}{dt} \simeq \frac{x(t+h) - x(t-h)}{h}$
（かえるとび差分）

} 差分近似

例

$m\frac{d^2x}{dt^2} = kx - \mu\frac{dx}{dt}$ において $v = \frac{dx}{dt}$ とおくと.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} \text{ : 力学系.}$$

ここで $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ を差分近似する.

(i) 前進差分

$$\frac{\boldsymbol{x}(t+h) - \boldsymbol{x}(t)}{h} = A\boldsymbol{x}(t) \Longrightarrow \boldsymbol{x}(t+h) = \boldsymbol{x}(t) + hA\boldsymbol{x}(t)$$
$$= \underbrace{(I + hA)}_{\tilde{A}}\boldsymbol{x}(t)$$

$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{x}(t+h) = \tilde{A}\boldsymbol{x}(t)$$

ここで $t = hn$ とおく. このとき $\left.\begin{matrix} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(nh) = \boldsymbol{x}^{(n)} \\ \boldsymbol{x}(t+h) = \boldsymbol{x}((n+1)h) = \boldsymbol{x}^{(n+1)} \end{matrix}\right\}$ とおく.

$$\Longrightarrow \boldsymbol{x}^{(n+1)} = \tilde{A}\boldsymbol{x}^{(n)} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^{(n+1)} \\ v^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ \frac{hk}{m} & 1 - \frac{hk}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{(n)} \\ v^{(n)} \end{pmatrix}$$

(ii) 後退差分

$$\frac{\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t-h)}{h} = A\boldsymbol{x}(t) \Longrightarrow \frac{\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^{(n-1)}}{h} = A\boldsymbol{x}^{(n)}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{x}^{(n)} = \boldsymbol{x}^{(n-1)} + hA\boldsymbol{x}^{(n)} \Longrightarrow \boldsymbol{x}^{(n)} - hA\boldsymbol{x}^{(n)} = \boldsymbol{x}^{(n-1)}$$

$$\Longrightarrow (I - hA)\boldsymbol{x}^{(n)} = \boldsymbol{x}^{(n-1)} \Longrightarrow \boldsymbol{x}^{(n)} = (I - hA)^{-1}\boldsymbol{x}^{(n-1)}$$

$$\Longrightarrow x^{(n+1)} = \underset{\tilde{A}}{\underset{\parallel}{\boxed{(I - hA)^{-1}}}} x^{(n)} \Longrightarrow x^{(n+1)} = \tilde{A} x^{(n)}.$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ -\frac{hk}{m} & 1+\frac{h\mu}{m} \end{pmatrix}^{-1}.$$

(iii) 中心差分

$$\frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} = Ax(t) \Longrightarrow \frac{x^{(n+1)} - x^{(n-1)}}{2h} = Ax^{(n)}$$

$$\Longrightarrow x^{(n+1)} = 2hAx^{(n)} + x^{(n-1)} \Longrightarrow \begin{cases} x^{(n+1)} = 2hAx^{(n)} + x^{(n-1)} \\ x^{(n)} = x^{(n)} + 0 \cdot x^{(n-1)}. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x^{(n+1)} \\ x^{(n)} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 2hA & I \\ \hline I & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \underset{\tilde{x}^{(n+1)}}{\underset{\parallel}{\boxed{\begin{pmatrix} x^{(n+1)} \\ v^{(n+1)} \\ x^{(n)} \\ v^{(n)} \end{pmatrix}}}} = \underset{\tilde{A}}{\underset{\parallel}{\boxed{\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2h & 1 & 0 \\ \frac{2hk}{m} & -\frac{2h\mu}{m} & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)}}} \underset{\tilde{x}^{(n)}}{\underset{\parallel}{\boxed{\begin{pmatrix} x^{(n)} \\ v^{(n)} \\ x^{(n-1)} \\ v^{(n-1)} \end{pmatrix}}}}$$

$$\Longrightarrow \tilde{x}^{(n+1)} = \tilde{A}\, \tilde{x}^{(n)}.$$

$\boxed{注}$ $\frac{dx}{dt} = Ax$ と $\tilde{x}^{(n+1)} = \tilde{A} x^{(n)}$ は異なる解をもつ。時間刻み幅 h により、解軌道は大きく変化する

一般に

$x^{(n+1)} = A x^{(n)}$: 離散力学系 (discrete dynamical system)

$$\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \quad \cdots \text{離散時間} \\ x \in \mathbb{R}^N \quad \cdots \text{空間} \\ A \in \mathbb{R}^{N \times N}. \end{cases}$$

No.
Date.

§離散力学系の一般解

$x^{(n+1)} = Ax^{(n)}$ の一般解は $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$ である.

(∵) $x^{(1)} = Ax^{(0)}$, $x^{(2)} = Ax^{(1)} = AAx^{(0)} = A^2x^{(0)}$, … [illegible].

A が固有値分解 $A = PDP^{-1}$ または

ジョルダン分解 $A = PJP^{-1}$ で表れるとする.

このとき,

$x^{(n)} = PDP^{-1}x^{(0)} \iff y^{(n)} = D^n y^{(0)}$, 座標変換 $x^{(n)} = Py^{(n)}$.

$$\iff \begin{cases} y_1^{(n)} = \lambda_1^n y_1^{(0)} \leftarrow \\ y_2^{(n)} = \lambda_2^n y_2^{(0)} \leftarrow \\ \vdots \qquad \vdots \leftarrow \\ y_N^{(n)} = \lambda_N^n y_N^{(0)} \leftarrow \end{cases}$$

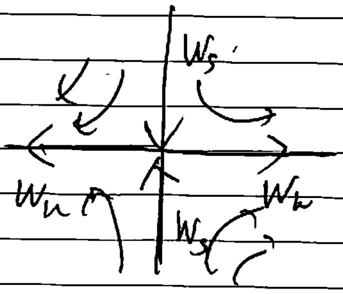
等比が $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ の 等比数列.

各成分は $|\lambda| < 1$ のとき収束し, $|\lambda| > 1$ のとき発散する.

$|\lambda| < 1$ のとき $W_s(\lambda)$: 安定部分空間

$|\lambda| > 1$ のとき $W_u(\lambda)$: 不安定部分空間

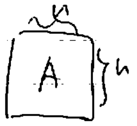
$|\lambda| = 1$ のとき $W_c(\lambda)$: 中心部分空間



特異値分解

§特異値分解

A : n×n 正方行列



固有値分解 $A = PDP^{-1}$

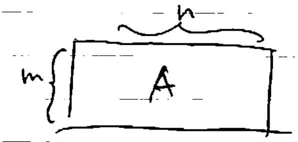
$\Updownarrow$

対角化 $D = P^{-1}AP$

ただし
$$\begin{cases} D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ P = (p_1\ p_2 \cdots\ p_n) \\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ p_i \in \mathbb{R}^n \\ A p_i = \lambda_i p_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

固有方程式

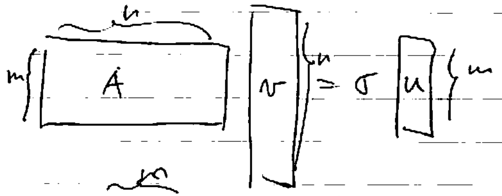
A : m×n 長方行列

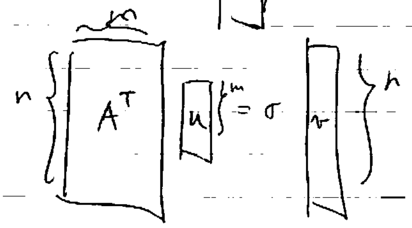


ただし、簡単のため $m \leq n$.

$\sigma_i \in \mathbb{R},\ u_i \in \mathbb{R}^m,\ v_i \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} A v_i = \sigma_i u_i & (i = 1, 2, \cdots, m). \\ A^T u_i = \sigma_i v_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ A v_i = 0 & (i = m+1, \cdots, n) \end{cases}$$

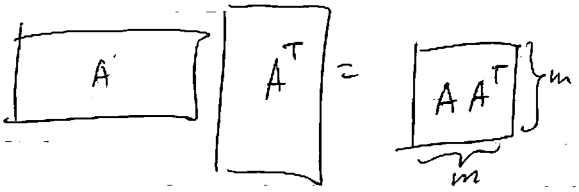


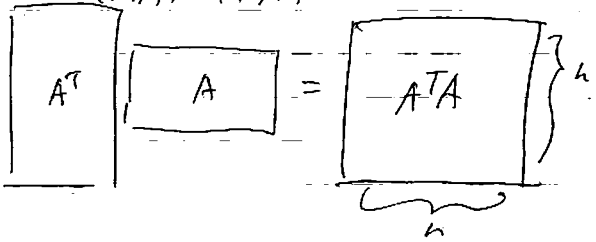


ただし. $\sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0, \cdots, \sigma_m \geq 0$.

$$\begin{cases} \sigma_i : \text{特異値 (singular value)} \\ u_i : \text{左特異ベクトル (left singular vector)} \\ v_i : \text{右特異ベクトル (right singular vector)} \end{cases}$$

(注) $B=A^TA,\ C=AA^T$ は対称行列である. (∵) $(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$.
$(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$ ㊮





(注) ① $Bv_i=(A^TA)v_i=A^T(Av_i)=A^T(\sigma_iu_i)=\sigma_i(A^Tu_i)=\sigma_i(\sigma_iv_i)=\sigma_i^2v_i$

$\Rightarrow Bv_i=\sigma_i^2v_i \Rightarrow B=A^TA$ の固有値 σ_i^2, 固有ベクトル v_i.

② $Cu_i=(AA^T)u_i=A(A^Tu_i)=A(\sigma_iv_i)=\sigma_i(Av_i)=\sigma_i(\sigma_iu_i)=\sigma_i^2u_i$

$\Rightarrow Cu_i=\sigma_i^2u_i \Rightarrow C=AA^T$ の固有値 σ_i^2, 固有ベクトル u_i

③ $Av_i=0 \Rightarrow A^TAv_i=A^T0=0 \Rightarrow Bv_i=0=0\cdot v_i \Rightarrow Bv_i=0\cdot v_i \Rightarrow B$ は $n-m$ 個の 0 固有値

よって, B, C は対称行列のため $V=(v_1\ v_2 \cdots v_n)$, $U=(u_1 \cdots u_m)$ は直交行列にとれる.

$\Rightarrow U^TU=I,\ V^TV=I$
$\Rightarrow U^{-1}=U^T,\ V^{-1}=V^T$.

(注) $A: n\times n$; $A^T=A$

対称行列の異なる固有値の固有ベクトルは直交する.

(∵) $\left.\begin{array}{l} Ax=\lambda x \\ Ay=\mu x \\ \lambda\neq\mu \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\lambda(x,y)=(\lambda x,y)=(Ax,y)=(Ax)^Ty=x^TA^Ty=(x,A^Ty)$
$=(x,Ay)=(x,\mu y)=\mu(x,y)$
$\Rightarrow (\lambda-\mu)(x,y)=0 \Rightarrow (x,y)=0 \Rightarrow x\perp y$ ㊮

(注) $A: m\times n$.
$Av_{m+1}=0, \cdots, Av_n=0$ より $v_{m+1}\in \mathrm{Ker}\,A,\ v_{m+2}\in \mathrm{Ker}\,A, \cdots, v_n\in \mathrm{Ker}\,A$ である.
$\{v_{m+1},\cdots,v_n\}$ を 1次独立にえらべば $\mathrm{Ker}\,A=\langle v_{m+1},\cdots,v_n\rangle_{\mathbb{R}}$ となる.
グラムシュミットの直交化法などで $\{v_{m+1},\cdots,v_n\}$ は正規直交系としてとれる.
よって, $V^TV=I$ が成立する.

(注) $A: n\times n$, $A^T=A$.
対称行列の重複固有値の固有ベクトルは正規直交系としてとれる.
$Ax=\lambda x \Rightarrow (A-\lambda I)x=0 \Rightarrow x\in \mathrm{Ker}(A-\lambda I)$

No.
Date

① $Av_i = \sigma_i u_i \quad (i=1,\cdots,m)$
② $A^T u_i = \sigma_i v_i \quad (\quad " \quad)$
③ $Av_i = 0 \quad (i=m+1,\cdots,n)$

①,③より
$$\Big(\overbrace{\underbrace{Av_1 \cdots Av_m}_{m} \; Av_{m+1} \cdots Av_n}^{n}\Big) = \Big(\overbrace{\underbrace{\sigma_1 u_1 \cdots \sigma_m u_m}_{m} \; 0 \cdots 0}^{n}\Big)$$

$$\iff {}^{m}\Big\{\overset{n}{A}\,(\underbrace{v_1 \cdots v_n}_{n})\Big\}^{n} = {}^{m}\Big\{(\underbrace{u_1 \cdots u_m}_{m}) \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix}\sigma_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \sigma_m\end{matrix}}_{m} & O \end{array}\right)}_{n}\Big\}m$$

$$\iff AV = U\Sigma$$

$$\iff A = U\Sigma V^T$$ 特異値分解 (SVD ; singular value decomposition)

②,③より
$$\big(A^T u_1 \cdots A^T u_m\big) = \big(\sigma_1 v_1 \cdots \sigma_m v_m\big)$$

$$\iff A^T(\underbrace{u_1 \cdots u_m}_{m})\Big\}^{n} = (\underbrace{\underbrace{v_1 \cdots v_m}_{m}\; v_{m+1} \cdots v_n}_{n}) \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix}\sigma_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \sigma_m\end{matrix}}^{m} \\ \hline O \end{array}\right)\begin{matrix}\}m \\ \\ \end{matrix}\Big\}n$$

$$\iff A^T U = V\Sigma^T$$

$$\iff A^T = V\Sigma^T U^T$$

$$\iff A = U\Sigma V^T$$ SVD

逆に書くと。
$$\underbrace{\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\sigma_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \sigma_m\end{matrix} & O \end{array}\right)}_{\text{特異値標準形}} = U^T A V$$

長方行列に対する
ある種の対角化

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \cdots \geq \sigma_m \geq 0$

㊟ 普通は特異値を大きい順に並べる。

§ 特異値 と 固有値

$A = U\Sigma V^T$, $U^TU = I$, $V^TV = I$ より

$$B = A^TA = (U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T) = V\Sigma^T \overset{I}{\boxed{U^TU}} \Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^T$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^T\Sigma = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1^2 & & & \\ & \ddots & & O \\ & & \sigma_m^2 & \\ \hline & O & & \begin{matrix} 0 & \\ & \ddots \\ & & 0 \end{matrix} \end{array}\right)}_{n} = V^TBV = V^T(A^TA)V.$$

$B = A^TA$の対角化.

$$C = AA^T = (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T = U\Sigma \overset{I}{\cancel{V^TV}} \Sigma^T U^T = U\Sigma\Sigma^T U^T$$

$$\Leftrightarrow \Sigma\Sigma^T = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m^2 \end{pmatrix}}_{m} \Big\}m = UCU^T = U(AA^T)U^T$$

$C = AA^T$の対角化

(注) $B = A^TA$の固有値 $\boxed{\lambda_1 = \sigma_1^2, \lambda_2 = \sigma_2^2, \cdots, \lambda_m = \sigma_m^2}$ $\lambda_{m+1} = 0, \cdots, \lambda_n = 0$

$C = AA^T$の固有値 $\boxed{\lambda_1 = \sigma_1^2, \lambda_2 = \sigma_2^2, \cdots, \lambda_m = \sigma_m^2}$.

全て正. 同じ.

$\Rightarrow$ Aの特異値 $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}$, $\cdots$, $\sigma_m = \sqrt{\lambda_m}$.

非負のみをえらぶ.

B, Cの固有値は全て非負 $\lambda_i = \sigma_i^2 \geq 0$.

(注) $A : \underset{\sim\sim}{m \times n}$

rank $A = r < m$ のとき,

(rank A^T = rank A)   dim Ker A^T = null A^T = $m - r > 0$ } である.

$A^Tu = 0$ の1次独立な解は $m-r$ 個ある.

$A^Tu = 0 \cdot v$ より 特異値 $\sigma = 0$ が $m-r$ 個ある.

$\Rightarrow$ $\sigma_{r+1} = 0$, $\sigma_{r+2} = 0$, $\cdots$, $\sigma_m = 0$.

$$A = U\Sigma V^T = U \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{matrix} & O & O \\ \hline O & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix} & O \\ \hline O & O & O \end{array}\right)}_{n} \begin{matrix} \}r \\ \}m \end{matrix} \Big\} n, \quad r = \text{rank}\,A$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.

§ スペクトル分解

$A : m \times n$

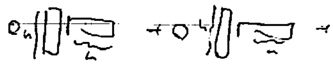
$A = U \Sigma V^T$

$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$ スペクトル分解

$A : n \times n$

$A = PDP^T$

$A = \lambda_1 p_1 p_1^T + \lambda_2 p_2 p_2^T + \cdots + \lambda_n p_n p_b^T$ スペクトル分解



§ ベクトルのノルム

$K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ 上の数ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$ のベクトル

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$ に対して，ノルム $\|x\|$ とは次のように定義される．

定義 次の(1),(2),(3)をみたす写像 $V \to \mathbb{R}$ をノルム(norm)と呼ぶ．

(1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in K$, $x \in V$.

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in V$.

例

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ 2乗ノルム，(ベクトルの)ユークリッドノルム

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ 絶対値ノルム

$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$ p乗ノルム

$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)$ — 最大値ノルム．

$= \max_{i=1,\cdots,n} |x_i|$

注 $x \in \mathbb{C}^n$ のとき $(\|x\|_2)^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^* x_i = x^* x$.

$x \in \mathbb{R}^n$ のとき $(\|x\|_2)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = x^T x$.

注 $A^* = (\bar{A})^T = \overline{(A^T)}$ ← 複素共役, $x^* = (\bar{x})^T = \overline{(x^T)}$ ← 複素共役．

No.
Date.

§行列ノルム

定義 次の(1)〜(4)をみたす写像 $A \mapsto \|A\| \in \mathbb{R}$ を行列ノルムと呼ぶ

(1) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = O$.

(2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

(3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(4) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

例

行列ノルム

ベクトルノルム

$$\|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$$

自然ノルム (natural norm)、スペクトルノルム、作用素ノルム (operator norm)

定理 $\|A\|_p$ は (1)〜(4) をみたす.

$$\because^{(3)} \|A+B\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|(A+B)x\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax + Bx\|_p \leq \max_{\|x\|_p=1} (\|Ax\|_p + \|Bx\|_p)$$

$$\leq \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p + \max_{\|x\|_p=1} \|Bx\|_p = \|A\|_p + \|B\|_p$$

定理

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$A = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n) = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$$

$$= \max_{j=1,\dots,n} \|a_j\|_1$$ ← 列ベクトルの絶対値ノルムの最大

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$= \max_{i=1,\dots,m} \|a^i\|_1$$ ← 行ベクトルの絶対値ノルムの最大

$$\because \|Ax\|_1 = \sum_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \sum_i \sum_j |a_{ij}| |x_{ij}| = \sum_j |x_j| \sum_i |a_{ij}|$$

$$\leq \left(\sum_j |x_j| \right) \left(\max_j \sum_i |a_{ij}| \right) = \|x\|_1 \left(\max_j \sum_i |a_{ij}| \right)$$

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

No.
Date

定理　$\|A\|_2 = \sigma_1$ ← Aの最大特異値.
ただし $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$

∵ $x = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$ とおく. ただし. $A = U\Sigma V^T$ とする.

$$Ax = c_1Av_1 + c_2Av_2 + \cdots + c_nAv_n = c_1\sigma_1u_1 + c_2\sigma_2u_2 + \cdots + c_m\sigma_mu_m + c_{m+1}0 + \cdots + c_n0$$

$$(\|Ax\|_2)^2 = (c_1\sigma_1u_1 + \cdots + c_m\sigma_mu_m)^T(c_1\sigma_1u_1 + \cdots + c_m\sigma_mu_m)$$
$$= c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + \cdots + c_m^2\sigma_m^2$$
ただし $\|u_i\| = 1,\ (u_i, u_j) = \delta_{ij}$

$$(\|x\|_2)^2 = (c_1v_1 + \cdots + c_nv_n)^T(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2$$

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{c_1^2+\cdots+c_n^2=1} \sqrt{c_1^2\sigma_1^2 + \cdots + c_m^2\sigma_m^2}$$
$$= \sqrt{\sigma_1^2} = \sigma_1$$
(∵ $c_1=1, c_2=0, \ldots, c_n=0$ のとき最大値をとる. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$ より)　□

定理　$A^TA = I$ のとき $\|A\|_2 = 1$

∵
$$(\|Ax\|_2)^2 = (Ax)^T(Ax) = x^T\overset{I}{\boxed{A^TA}}x = x^Tx = (\|x\|_2)^2$$

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1$$　□

定理　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix}$ のとき 全てのpで $\|A\|_p = \max_{i=1\ldots n} |a_{ii}|$

∵
$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p = \max_{x_1^p+\cdots+x_n^p=1} \sqrt[p]{|a_{11}|^p|x_1|^p + \cdots + |a_{nn}|^p|x_n|^p}$$

$|a_{11}|, \ldots, |a_{nn}|$ のうち $|a_{ii}|$ が最大であるとすると, $x_1^p=0, x_1^p=0, \ldots x_i^p=1, \ldots x_n^p=0$ のとき最大値をとる.

よって. $\|A\|_p = \sqrt[p]{|a_{ii}|^p} = |a_{ii}|$ となる.　□

定理　$A: n\times n$, 正則 のとき $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_n} = \frac{1}{\lambda_n}$ ← 最小特異値(固有値)の逆数

ただし. $\begin{cases} \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \end{cases}$

定義

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

Frobenius norm
フロベニウス・ノルム

行列のユークリッドノルム

定理 $\|A\|_F$ はノルムの(1)〜(4)の性質をみたす.

∵(4) $(\|AB\|_F)^2 = \sum_i\sum_j \left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^2 \leq \sum_i\sum_j \left(\sum_k |a_{ik}||b_{kj}|\right)^2$
$\leq \sum_i\sum_j \left(\sum_k |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_l |b_{lj}|^2\right) = \left(\sum_i\sum_k |a_{ik}|^2\right)\left(\sum_j\sum_l |b_{lj}|^2\right) = \|A\|_F^2\|B\|_F^2$

定理

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_m^2}$$

∵ $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}\,(A^TA)} = \sqrt{\mathrm{tr}\,(U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T)} = \sqrt{\mathrm{tr}\,(V\Sigma^T \underset{I}{\underline{U^TU}}\Sigma V^T)}$

$= \sqrt{\mathrm{tr}\,(V\Sigma^T\Sigma V^T)} = \sqrt{\mathrm{tr}\,(\Sigma^T\Sigma \underset{I}{\underline{VV^T}})} = \sqrt{\mathrm{tr}\,(\Sigma^T\Sigma)}$

$$= \sqrt{\mathrm{tr}\left(\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1^2 & & & & & \\ & \sigma_2^2 & & & 0 & \\ & 0 & \ddots & & & \\ & & \sigma_m^2 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right)} = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_m^2}$$

定理 $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$.

∵ $\|A\|_2 = \sigma_1 \leq \sqrt{\sigma_1^2+\cdots+\sigma_m^2} = \|A\|_F$

---

§ 行列のトレース

<u>行列のトレース</u> $\mathrm{tr}\,A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, $A: n\times n$

定理
(1) $\mathrm{tr}\,(A+B) = \mathrm{tr}\,A + \mathrm{tr}\,B$
(2) $\mathrm{tr}\,A^T = \mathrm{tr}\,A$
(3) $\mathrm{tr}\,\alpha A = \alpha\,\mathrm{tr}\,A$
(4) $\mathrm{tr}\,AB = \mathrm{tr}\,BA$.

定義

$A : n \times n$ 固有値の集合 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ← スペクトル (spectrum)

$A : m \times n$ 特異値の集合 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ ←

スペクトル半径 $\rho(A) = \max_{i=1 \dots n} |\lambda_i|$

$$\rho(A) = \max_{i=1 \dots m} \sigma_i$$

定理

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

$\because$ $\|A\|_2 = \sigma_1 = \rho(A) = \max(\sigma_1 \dots \sigma_m)$ ← ただし $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m$.

定理

$$\|A\|_p \geq \rho(A) \quad (p = 1, 2, \dots, \infty)$$

定理

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p$$

$\because$ $\|A\|_p = \max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p = \max \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \Leftrightarrow \|A\|_p \geq \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$

$\Leftrightarrow \|A\|_p \|x\|_p \geq \|Ax\|_p$

No.
Date

§ 条件数

定義 $A : n \times n$

$\mathrm{cond}_p\, A = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$ 条件数 (condition number)

例 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ のとき $\mathrm{cond}_p\, A = \dfrac{\max\limits_{i} |a_{ii}|}{\min\limits_{i} |a_{ii}|}$

$A^T A = I$ のとき $\mathrm{cond}_2\, A = 1$.

A の特異値 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$ のとき $\mathrm{cond}_2\, A = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_n}$ ← 最大と最小の比.

注 条件数の大きい行列のほど、多くの数値計算アルゴリズムで、数値誤差の拡大が起こりやすいことが知られている.

注 $\mathrm{cond}_p\, A \geq \dfrac{1}{\varepsilon_M}$ であるとき 悪条件 であるという.

ただし、ε_M はマシンイプシロン.
倍精度 $\varepsilon_M = 2^{-54} \simeq 10^{-15} \sim 10^{-16}$
単精度 $\varepsilon_M = 2^{-26} \simeq 10^{-7} \sim 10^{-8}$

No.
Date.

§ 一般逆行列

定義 $A : m \times n$

$$\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times m}{A^-}\,\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{A} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A^- : \text{一般逆行列 (generalized inverse)}$$

擬逆行列 (pseudo inverse)

注
- ☆ $\mathrm{rank}(A) < n$ でもよい.
- ☆ 一意に定まるとは限らない.
- ☆ A : 正則のとき $A^- = A^{-1}$.

定理 $y = Ax$ の解は $x = A^- y \Longleftrightarrow AA^-A = A$ (Rao, 1962).

∵ ($\Leftarrow$). $AA^-A = A \Rightarrow AA^-\underbrace{Ac}_{y} = \boxed{\underbrace{Ac}_{y}} \Rightarrow \boxed{A\underbrace{A^-y}_{x}} = y \Rightarrow x = A^-y$ は $Ax = y$ の解 ∎

($\Rightarrow$) $Ax = y,\ x = A^-y,\ y = Ac \Rightarrow AA^-Ac = Ac \Rightarrow AA^-A = A$ ∎

定義 $A : m \times n$

$$\left.\begin{array}{l} AA^+A = A,\ A^+AA^+ = A^+ \\ (AA^+)^* = AA^+,\ (A^+A)^* = A^+A \end{array}\right\} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{Moor-Penrose 形 一般逆行列}$$

定理 $y = Ax$ のとき $x = A^+y$ が解.

∵ $\left.\begin{array}{l} y = Ax \\ x = A^+y \end{array}\right\} \Rightarrow y = AA^+y \Rightarrow A^+y = A^+AA^+y = A^+y \Rightarrow A^+y = A^+y$. ∎

定理 A^+ は一意に定まり, $(A^+)^+ = A$ が成立する. (Kalman, 1972)

No.
Date.

定理

$$\underset{\substack{\uparrow\\ n\times m}}{A^{+}} = \underset{\substack{\uparrow\\ n\times n}}{V}\,\underset{\substack{\uparrow\\ n\times m}}{\Sigma^{+}}\,\underset{\substack{\uparrow\\ m\times m}}{U^{T}},\quad \Sigma^{+} = \left(\begin{array}{cccc} \sigma_1^{+} & & & O \\ & \sigma_2^{+} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \sigma_m^{+} \\ \hline & & O & \end{array}\right)\begin{array}{l} \}\,m \\ \\ \}\,n. \end{array}$$

ただし、
$$\underset{\substack{\uparrow\\ m\times n}}{A} = \underset{\substack{\uparrow\\ m\times m}}{U}\,\underset{\substack{\uparrow\\ m\times n}}{\Sigma}\,\underset{\substack{\uparrow\\ n\times n}}{V^{T}},\quad \Sigma = \underbrace{\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} \sigma_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \sigma_m \end{array}}_{m} \;\middle|\; O\right)}_{n.}$$

∵ $$AA^{+}A = U\Sigma\overset{=I}{V^{T}V}\Sigma^{+}\overset{=I}{U^{T}U}\Sigma V^{T}$$
$$= U\Sigma I\Sigma^{+}I\Sigma V^{T} = U\Sigma\Sigma^{+}\Sigma V^{T} = U\Sigma V^{T} = A$$ わ

§ 例

$\boxed{例}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

$B = A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 30 \\ 10 & 5 & 15 \\ 30 & 15 & 45 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

$C = AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 28 & 56 \end{pmatrix} = 14 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$|C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 14-\lambda & 28 \\ 28 & 56-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-14)(\lambda-56) - 28^2 = \lambda^2 - 70\lambda + \cancel{4\times14^2} - \cancel{4\times14^2}$

$= \lambda^2 - 70\lambda = \lambda(\lambda-70) = 0 \Rightarrow$ Cの固有値 $\lambda = 0, 70$.

Aの 特異値は $\sigma_1 = \sqrt{70}$, $\sigma_2 = 0$ であり,

$\|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{70}$, $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{70+0} = \sqrt{70}$. を得る.

または, $\|A\|_F = \sqrt{2^2+1^2+3^2+4^2+2^2+6^2} = \sqrt{70}$ としても等しい.

$\boxed{例}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$B = A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$C = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

$|C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-6)^2 - (-3)^2 = \lambda^2 - 12\lambda + 36 - 9 = \lambda^2 - 12\lambda + 27$

$= (\lambda-3)(\lambda-9) = 0 \Rightarrow \lambda = 3, 9$.

$|B = \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -4 \\ -1 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda-5)^2 - 4 - 4 + (\lambda-5) + (\lambda-5) + 16(\lambda-2)$

$= -(\lambda-2)(\lambda^2 - 10\lambda + 25) + 18\lambda - 50$

$= -(\lambda^3 + 10\lambda^2 - 25\lambda + 2\lambda^2 - 20\lambda + \cancel{50} + 18\lambda - \cancel{50}$

$= -\lambda(\lambda^2 - 12\lambda + 27) = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-9) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 3, 9$

$\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 0$ より Aの特異値は $\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{9} = 3 \\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{3} \end{cases}$ となる

$\|A\|_2 = \sigma_1 = 3$ である.

$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$ であり,

$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2 + 1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{12}$ で等しい.

特異ベクトルを求める.

$(C - \lambda I)x = 0$ より

$\lambda = 9$ のとき $C - 9I = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$ のとき $C - 3I = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(B - \lambda I)x = 0$ より

$\lambda = 9$ のとき $B - 9I = \begin{pmatrix} -7 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ -1 & -4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$ のとき

$B - 3I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 0$ のとき

$B - 0I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

No.
Date.

Aの特異値分解(SVD)は

$$A=U\Sigma V^T,\quad U=(u_1\ u_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad \Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0\end{pmatrix}$$

$$V=(v_1\ v_2\ v_3)=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0 & 2 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

となる　注 u_1,u_2,v_1,v_2 の正負は $Av_i=\sigma_i u_i$ が成立するように選ぶ.

Aに関するMoor-penroseの一般逆行列は

$$A^+=V\Sigma^+U^T=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0 & 2 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0 & 2 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{3}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{6\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0 & 2 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \sqrt{3} & \sqrt{3}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-2\sqrt{3} & -2\sqrt{3}\\ 0 & -2\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

このとき $AA^+A=A$, $A^+AA^+=A^+$, $(AA^+)^T=AA^+$, $(A^+A)^T=A^+A$ が成立する

$Ax=y$ の解の1つは $x=A^+y$ である. $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}y_1+y_2\\ -y_2\\ -y_1\end{pmatrix}$ となる.

一方. $Ax=y$ の解を簡約化して求めると

$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & y_1\\ 1 & -2 & 1 & y_2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & \frac{2}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2\\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2\end{array}\right)$ より. $x=c\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2\\ \frac{1}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2\\ 0\end{pmatrix}$ となる.

$c=-\frac{1}{3}y_1$ のとき. $x=A^+y$ と一致する. これは $\|x\|$ が最小となるときである,

$\|x\|^2=(c+\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2)^2+(c+\frac{1}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2)^2+c^2$ より

$\frac{\partial\|x\|^2}{\partial c}=3c+y_1=0$ を求めると $c=-\frac{y_1}{3}$ のとき極小値をとる.

㊟ 方程式 $Ax=y$ は任意性があり一意には定まらない.
$x=A^+y$ は $\|x\|_2^2$ が最小となるときの解である.

No.
Date

$c=\frac{a}{3}y_1+\frac{b}{3}y_2$ とおくと.

$$x=\begin{pmatrix} c+\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2 \\ c+\frac{1}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2 \\ c \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} (a+2)y_1+(b+1)y_2 \\ (a+1)y_1+(b-1)y_2 \\ ay_1+by_2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} a+2 & b+1 \\ a+1 & b-1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x=A^- y,\ A^-=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} a+2 & b+1 \\ a+1 & b-1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

と表される。このとき

$$AA^-A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+2 & b+1 \\ a+1 & b-1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}=A$$

をみたすので A^- は A の一般逆行列である.

(注) a, b は任意であるから, A の一般逆行列 A^- は一意には定まらない.

(問) A^- が $A^-AA^-=A^-$, $(AA^-)^T=AA^-$, $(A^-A)^T=A^-A$ をみたすときの a, b の条件を定めよ.

(問) $x=A^-y$ のノルム $\|x\|_2$ が最小となる a, b を定めよ.

(い) $\|x\|_2{}^2=\frac{1}{9}\{((a+2)y_1+(b+1)y_2)^2+((a+1)y_1+(b-1)y_2)^2+(ay_1+by_2)^2\}$ より

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \|x\|_2{}^2}{\partial a}&=\frac{2}{3}y_1\{(a+1)y_1+by_2\}=0 \\ \frac{\partial \|x\|_2{}^2}{\partial b}&=\frac{2}{3}y_2\{(a+1)y_1+by_2\}=0 \end{aligned}\right\}$$

となるので $a=-1, b=0$ のとき $\|x\|_2{}^2$ は極小値を持ち最小値をとる。 答

No.
Date.

§ 正規行列

定義 A：$\underset{\sim\sim\sim}{n\times n}$

$$A^*A = AA^* \overset{def}{\Longleftrightarrow} A\text{：正規行列 (normal matrix)}$$

定義 $A^* = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$ ： 共役転置

例

エルミート行列 (Hermite matrix) $A^* = A$ ∵ $\left.\begin{array}{l} A^*A = AA = A^2 \\ AA^* = AA = A^2 \end{array}\right\}$

歪エルミート行列 (skew Hermite matrix) $A^* = -A$ ∵ $\left.\begin{array}{l} A^*A = -AA = -A^2 \\ AA^* = -AA = -A^2 \end{array}\right\}$

ユニタリー行列 (unitary matrix) $A^*A = AA^* = I$. ∵ 明らか

対称行列 (Symmetix mat.) $A^T = A$ ∵ $\left.\begin{array}{l} A^*A = A^TA = AA = A^2 \\ AA^* = AA^T = AA = A^2 \end{array}\right\}$

歪対称行列 (skew sym. mat.)
交代行列 (alternative mat.) $\Big\}$ $A^T = -A$. ∵ $\left.\begin{array}{l} A^*A = A^TA = AA = -A^2 \\ AA^* = AA^T = -AA = -A^2 \end{array}\right\}$

直交行列 (Orthogonal matrix) $A^TA = AA^T = I$. ∵ $\left.\begin{array}{l} A^*A = A^TA = I \\ AA^* = AA^T = I \end{array}\right\}$

定理 $A^*A = AA^* \Rightarrow$ 異なる固有値の固有ベクトルは直交.

定理 $A^*A = AA^* \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = U^*AU$, U：ユニタリー行列

または

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = U^TAU$, U：直交行列

§ 正定値

$\boxed{\text{定義}}$ $A : n \times n,\ x \in \mathbb{C}^n$

$$h(x;A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_i}x_j = x^* A x = (x, Ax) \in \mathbb{R}$$

エルミートの2次形式 (Hermite quadratic).

$\boxed{\text{定義}}$ $x, y \in \mathbb{C}^n$

内積 $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i = x^* y \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{注}}$ A : エルミート行列 $\Rightarrow \overline{h(x)} = h(x)$.

$\boxed{\text{定義}}$

$h(x;A) > 0 \overset{\text{def}}{\iff} A$: 正定値 (positive-definite)

$h(x;A) \geq 0 \iff A$: 非負定値 (nonnegative-), 半正定値 (positive-semidefinite)

$h(x;A) < 0 \iff A$: 負定値 (negative-definite)

$h(x;A) \leq 0 \iff A$: 非正定値 (nonpositive-), 半負定値 (positive-semidefinite)

$\boxed{\text{定理}}$ A : エルミート行列, 対称行列.

$h(x;A) > 0 \iff \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \cdots, \lambda_n > 0.$

(∵) Aはユニタリー行列で対角化できるので, $A p_i = \lambda_i p_i$, $(p_i, p_j) = \delta_{ij}$ として.
$x = c_1 p_1 + \cdots + c_n p_n$ とおく. このとき
$Ax = c_1 A p_1 + \cdots + c_n A p_n = c_1 \lambda_1 p_1 + \cdots + c_n \lambda_n p_n$ であり
$h = (x, Ax) = (c_1 p_1 + \cdots + c_n p_n, c_1 \lambda_1 p_1 + \cdots + c_n \lambda_n p_n) = \sum_i \sum_j \lambda_j \overline{c_i} c_j (p_i, p_j)$
$= \sum_j \lambda_j |c_j|^2 = \lambda_1 |c_1|^2 + \cdots + \lambda_n |c_n|^2$
となる. $|c_1|^2, \cdots, |c_n|^2$ は任意の実数であるから, $h > 0$ となるのは.
$\lambda_1 > 0, \cdots, \lambda_n > 0$ のときのみである.

(注) エルミート行列, 対称行列の固有値はすべて実数

定理 $\begin{cases} A : m \times n \\ B = \underset{n\times m,\ m\times n}{A^* A} \ : n \times n \end{cases}$ は $\begin{cases} B : 正定値 \\ B : エルミート行列 \end{cases}$ ⟺ Bの固有値は全て正.

∵ $h = (x, Bx) = x^* B x = x^* A^* A x = (\underset{y}{\underset{\shortparallel}{\boxed{Ax}}})^* (\underset{y}{\underset{\shortparallel}{\boxed{Ax}}}) = y^* y = (y, y) = \|y\|^2 > 0$.

⟺ B の固有値は正.

定理 A : n×n, 正規行列, 正定値

⟹ 固有値分解と特異値分解は一致.

∵ SVD : $\underset{n\times n}{\overset{\uparrow}{A}} = \underset{n\times n}{\overset{\uparrow}{U}} \underset{n\times n}{\overset{\uparrow}{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix}}} \underset{n\times n.}{\overset{\uparrow}{V^*}}$.

$A^*A = AA^*$ より $B = A^*A$ と $C = AA^*$ の固有値, 固有ベクトルは同じであるから
$U = V$ となる. よって

$A = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix} U^*$ であり, これは固有値分解である.