ゼミ演習（数学）

近藤弘一

最終更新：平成 21 年 4 月 3 日

目 次

1　複素数

1.1　集合

定義 1.1 (集合) ある一定範囲にある対象物の集まりを１つの全体として考えるとき，これを**集合（set）**という．その範囲内の個々の対象物を**元**または**要素（element）**という．x が集合 X の元であることを，x は X に**属する（belong）**，または X は x を**含む（包含する）（contain）**といい，$x \in X$ と表記する．その否定を $x \notin X$ と表記する．

ある元 x が条件 $C(x)$ をみたすとする．このとき，条件をみたす x 全体の集合を

$$X = \{\, x \mid C(x) \,\}$$

と表記する．

定義 1.2 (集合の包含関係)

- 元を１つも含まない集合を**空集合（empty set）**といい，$X = \emptyset$ と表記する．
- 集合 X と Y に含まれる元が全て等しいとき $X = Y$ と表記する．$X = Y$ ではないとき $X \neq Y$ と書く．
- X に含まれる全ての元が Y に含まれるとき，Y は X を**含む（contain）**，または，X は Y の**部分集合（subset）**といい，$X \subset Y$ と表記する．$X \subset Y$ ではないとき $X \not\subset Y$ と書く．

注意 1.3 (真部分集合) $X \subset Y$ は定義より $X = Y$ の意味も含む．$X \subset Y$ でありかつ $X \neq Y$ のときは，X は Y の**真部分集合（proper subset）**という．これを $X \subsetneq Y$ と表記する．書物によっては部分集合に $\subseteq$ を用い，真部分集合に $\subset$ を用いる場合もあるので注意が必要である．

1.2　いろいろな数

定義 1.4 (数の集合)

- **自然数（natural number）**全体の集合：
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}.$$
- **整数（integer）**全体の集合：
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$
- **有理数（rational number, rational integer）**全体の集合：
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$
- **実数（real number）**全体の集合：
$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \{\, \text{有理数と}\textbf{無理数（irrational number）}\text{全体の集合} \,\} \\ &= \left\{ a + \sum_{n=1}^{\infty} b_n 10^{-n} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z};\ b_n \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\} \right\}. \end{aligned}$$

- **複素数（complex number）**全体の集合：

$$\mathbb{C} = \{ \, x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}; \, i^2 = -1 \, \}.$$

例 1.5 (包含関係の具体例)

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

1.3　複素数

定義 1.6 (複素数) **複素数（complex number）**とは，実数 x, y に対して $z = x + iy$ で定まる数である．ただし i は $i^2 = -1$ をみたし，**虚数単位（imaginary unit）**と呼ぶ．複素数 $z = x + iy$ の x を**実部（real part）**といい $x = \mathrm{Re}(z)$ と表す．y を**虚部（imaginary part）**といい $y = \mathrm{Im}(z)$ と表す．虚部が $\mathrm{Im}(z) = 0$ のとき z は**実数（real number）**といい，虚部が 0 でない複素数を**虚数（imaginary number）**といい，実部が $\mathrm{Re}(z) = 0$ の虚数を**純虚数（pure imaginary number）**という．

定義 1.7 (複素平面) 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と表す．この集合を実部 $\mathrm{Re}(z)$ を横軸に虚部 $\mathrm{Im}(z)$ を縦軸にとることできる平面を**複素平面（complex plane）**と呼ぶ．このとき横軸を**実軸（real axis）**といい，縦軸を**虚軸（imaginary axis）**という．

定義 1.8 (複素共役) 複素数 $z = x + iy$ に対して複素数 $\overline{z} = x - iy$ を z の**複素共役（complex conjugate）**という．

定義 1.9 (複素数の絶対値と偏角) 複素数 $z = x + iy$ に対して実数 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ を z の**絶対値（absolute value）**または**大きさ（modulus）**という．$\arg z = \arctan(y/x) = \tan^{-1}(y/x)$ を z の**偏角（argument）**という．

注意 1.10 (複素数の絶対値と偏角) 複素平面上で原点 0 とあるある複素数 $z = x + iy$ との距離は z の絶対値 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ である．また，実軸と 2 点 $0, z$ を通る直線とのなす角は z の偏角 $\arg z = \theta$ である．ただし，θ は $\tan\theta = y/x$ をみたせばよいので，θ に 2π の整数倍を加えたものもまた偏角であるから，

$$\arg z = \theta + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

と任意性がある．特に，偏角のなかで $-\pi < \arg z \leq \pi$ をみたすものを**偏角の主値**とよび $\mathrm{Arg}\, z$ と書くことにする．

定義 1.11 (極形式) 複素数 $z = x + iy$ は

$$z = re^{i\theta}, \quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arg z = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{2}$$

と表せる．これを複素数の**極形式**という．

定義 1.12 (オイラーの公式)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{3}$$

注意 1.13 (複素数の演算) 複素数 $z=x+iy$, $w=u+iv$ に対して次の四則演算が成り立つ：

$$z \pm w = (x \pm u) + i(y \pm v), \tag{4}$$

$$zw = (x+iy)(u+iv) = xu + ixv + iyu + i^2 yv = (xu - yv) + i(xv + yu), \tag{5}$$

$$\frac{w}{z} = \frac{u+iv}{x+iy} = \frac{(u+iv)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{xu - iyu + ixv - i^2 yv}{x^2 - ixy + ixy - i^2 y^2} = \frac{(xu+yv) + i(xv - yu)}{x^2 + y^2}. \tag{6}$$

定理 1.14 (複素数の性質) 次の性質が成り立つ：

(1) $\overline{\overline{z}} = z$ (2) $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$. (3) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$. (4) $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$ (5) $|z+w| \leq |z| + |w|$

(6) $|zw| = |z||w|$ (7) $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$ (8) $|z|^2 = z\overline{z}$ (9) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ (10) $|\overline{z}| = z$

(11) $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ (12) $\frac{w}{z} = \frac{w\overline{z}}{|z|^2}$ (13) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ (14) $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

(15) $z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z$ は実数. (16) $z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z$ は純虚数. (17) $\arg(zw) = \arg z + \arg w$

(18) $\arg\left(\frac{w}{z}\right) = \arg w - \arg z$ (19) $\arg \overline{z} = -\arg z$

問 1.15 (複素数の性質) これらの性質を示せ.

例 1.16 (極形式) 複素数 $z = 1 - i$ の大きさは $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ であり，偏角は $\theta = \arg z = \tan^{-1}(-1/1) = -\pi/4 + 2n\pi$ である．z の極形式は

$$z = 1 - i = re^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)} = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}e^{2n\pi i} = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} \tag{7}$$

となる.

例 1.17 (極形式) 複素数 $z = i$ の大きさは $r = |z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ であり，偏角は $\theta = \arg z = \tan^{-1}\infty = \pi/2 + 2n\pi$ である．z の極形式は

$$z = i = re^{i\theta} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} = e^{\frac{i\pi}{2}}e^{2n\pi i} = e^{\frac{i\pi}{2}} \tag{8}$$

となる.

例 1.18 (べき乗の根) $z^2 = i$ をみたす複素数 z を求める．極形式にして式変形すると

$$z^2 = i = e^{i\pi/2 + 2n\pi i} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{z^2} = \left(e^{i\pi/2 + 2n\pi i}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

$$\Rightarrow \quad z = e^{i\pi/4 + n\pi i} = e^{i\pi/4}e^{n\pi i} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\cos n\pi + i\sin n\pi) = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}} \tag{10}$$

を得る．$z^2 = i$ の両辺に根号をとると $\sqrt{i} = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ が成り立つ.

例 1.19 (多項式の根) $z^2 + 2iz + i - 1 = 0$ の根を求める．実数と同じように解の公式を用いると

$$z = -i + \sqrt{D}, \quad D = i^2 - (i-1) = -1 - i + 1 = -i \tag{11}$$

となる．D を極形式で表すと

$$D = e^{i\theta + 2n\pi i}, \quad \theta = \tan^{-1}(-\infty) = -\pi/2 \tag{12}$$

であるから，

$$\sqrt{D} = \left(e^{i\theta + 2n\pi i}\right)^{1/2} = e^{i\theta/2 + n\pi i} = e^{i\theta/2} e^{n\pi i} = \pm\left(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\right) = \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}} \tag{13}$$

となり，

$$z = -i \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \tag{14}$$

を得る．

1.4　演習 〜 複素数

問 1.20 (複素数) 次の数のうち複素数，実数，虚数，純虚数はどれか述べよ．
(1) i　(2) 1　(3) $1+i$　(4) $-5i$　(5) $-2+4i$　(6) 3　(7) $(1-i)^3$　(8) $(1-i)(1+i)$

問 1.21 (複素数) 絶対値が $2\sqrt{3}$ で偏角が 75° の複素数を求めよ．

問 1.22 (複素数) 次の複素数を $z = x + iy$ と極形式 $z = re^{i\theta}$ の形で表し，複素平面上にプロットせよ．
(1) $-1+i$　(2) $\sqrt{3}+i$　(3) $(3+\sqrt{3}i)/2$　(4) $(-1+i)(2+i)$　(5) $\dfrac{3+4i}{3-4i}$　(6) $\dfrac{2-i}{3+5i}$
(7) $(1-i)^{-4}$　(8) $(1+i)^5 - (1-i)^5$　(9) $3+i+\overline{(-4+5i)}$　(10) $(-1+i)\overline{(5-2i)}$　(11) $\dfrac{3+i}{5+\overline{(-1+i)}}$

問 1.23 (複素数) $z = (-\sqrt{3}+i)/3$, $w = (\sqrt{3}+i)/6$ のとき $|z-w|$, $\arg(w-z)$ を求めよ．

問 1.24 (複素数) $z = (3+\sqrt{3}i)/2$ のとき z^6 を求めよ．

問 1.25 (複素数) 複素数 $z = 1+i$, $w = 1-\sqrt{3}i$ のとき次を計算せよ．
(1) $z+w$　(2) $z-w$　(3) zw　(4) w/z　(5) $\overline{z}$　(6) $\overline{w}$　(7) $\overline{z+w}$　(8) $\overline{z-w}$　(9) $\overline{zw}$
(10) z^{-1}　(11) w^{-1}　(12) $\overline{w/z}$　(13) $z\overline{z}$　(14) $w\overline{w}$　(15) $|z|$　(16) $|w|$　(17) $|zw|$　(18) $|w/z|$
(19) $|\overline{z}|$　(20) $|\overline{w}|$　(21) $|\overline{zw}|$　(22) $\left|\overline{(w/z)}\right|$　(23) $|z-w|$　(24) $\arg z$　(25) $\arg w$　(26) $\arg zw$
(27) $\arg\dfrac{w}{z}$　(28) $\arg\overline{z}$　(29) $\arg\overline{w}$　(30) $\arg\overline{zw}$　(31) $\arg\overline{(w/z)}$　(32) $\dfrac{z+\overline{z}}{2}$　(33) $\dfrac{w+\overline{w}}{2}$
(34) $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$　(35) $\dfrac{w-\overline{w}}{2i}$　(36) z^2　(37) z^3　(38) z^4　(39) w^2　(40) w^3　(41) w^4

問 1.26 (多項式の根) 次の多項式の根を複素平面上にプロットせよ．
(1) $z^2-2z+4=0$　(2) $z^2+1=0$　(3) $(z+1)(z^2+1)=0$　(4) $z^2+z+1=0$　(5) $z^3+1=0$
(6) $z^2-2z-1=0$　(7) $z^2-2z+3=0$　(8) $z^3-z^2+z-1=0$

問 1.27 (べき乗の根) $z^n = 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$ の根を複素平面上にプロットせよ．

問 1.28 (多項式の根) 次の方程式の根を求めよ．
(1) $z^2 - 2iz - 2 - i\sqrt{3} = 0$　(2) $z^3 = 2+2i$　(3) $z^5 = 16 + 16\sqrt{3}i$

問 1.29 (多項式の根) 複素数 $\alpha \neq 0$ に対して $z^2 = \alpha$ となる複素数 z が 2 つだけ存在し，その一方が β ならもう一方は $-\beta$ であることを示せ．

問 1.30 (べき乗の根) 次の複素数を計算せよ．

(1) $\sqrt{-i}$ (2) $\sqrt{3+4i}$ (3) $\sqrt[4]{16}$ (4) $\sqrt[3]{-8i}$ (5) $\sqrt[2]{1+i}$ (6) $\sqrt[4]{2+2\sqrt{3}i}$

問 1.31 (カルダノの公式) 方程式

$$x^3 + 3px + 2q = 0 \tag{15}$$

の根は

$$x = u + v, \quad u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{\Delta}}, \quad v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{\Delta}}, \quad \Delta = q^2 + p^3 \tag{16}$$

で与えられる．これを用いて

$$x^3 - 21x + 20 = 0 \tag{17}$$

の根が 1, 4, -5 であることを示せ．

2 ベクトルと図形

2.1 参考文献

詳細は

`http://amath.doshisha.ac.jp/~kon/lectures/2007.linear-algebra-I/linear-algebra-I.pdf`

を参照のこと．

2.2 ベクトル

定義 2.1 (ベクトルその 1) 位置の違いを無視して，向きと大きさをもつ量（矢印，**有向線分（oriented segment）**）を**ベクトル（vector）**という．これに対して方向をもたない普通の量を**スカラー（scalar）**という．

注意 2.2 (ベクトルの平行移動は同じもの) **始点（initial point）** A から**終点（terminal point）** B への有向線分を表すベクトルを $\overrightarrow{AB}$ と表記する．ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{PQ}$ とを原点に平行移動したときこれらのベクトルが等しければ，$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ である．すなわち，ベクトルは平行移動しても同じ量であるとみなす．たくさんある同じベクトルのうち代表して始点が原点にあるものを選ぶ．

定義 2.3 (ベクトルその 2) **列ベクトル（column vector）**

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{18}$$

と**行ベクトル（row vector）**

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \tag{19}$$

を総称して**ベクトル（vector）**という．括弧の中の値 $a_1, \cdots, a_n$ をベクトルの**成分（component）**または**要素（element）**という．n 次の列ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$ で表す．n 次の行ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}_n$ で表す．$\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n$ を n **次元実ベクトル空間（n-dimensional real vector space）**という．また，要素が複素数の場合は $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}_n$ と表し，n **次元複素ベクトル空間（n-dimensional complex vector space）**という．

注意 2.4 (括弧) 行ベクトル，列ベクトルの括弧は，丸い括弧でも角張った括弧でもどちらを使ってもかまわない：

$$\begin{bmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \end{bmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \end{pmatrix}. \tag{20}$$

注意 2.5 (列ベクトル，行ベクトル) n 次の列ベクトルは $n \times 1$ 行列である．n 次の行ベクトルは $1 \times n$ 行列である．

2.3　位置ベクトル

定義 2.6 (位置ベクトル) $\mathbb{R}^n$ 空間内の点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と原点 $O(0, 0, \cdots, 0)$ より得られるベクトル

$$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{21}$$

を点 P の**位置ベクトル（position vector）** という．点 P とベトクル $\boldsymbol{p}$ を同一視する．

注意 2.7 (位置ベクトル) 点 P の座標が $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ のときは，$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と表記する．点 P の位置ベクトルが $\boldsymbol{p}$ のときは，$P(\boldsymbol{p})$ と表記することにする．

2.4　直線の方程式

定義 2.8 (直線) $\mathbb{R}^n$ 空間内の点 X の位置ベクトルが

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + t\,\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{22}$$

と表されるとき，点 X の軌跡を**直線（line）**という．$\boldsymbol{p}$ を**方向ベクトル（tangent vector）**という．

2.5　$\mathbb{R}^2$ における直線の方程式

例 2.9 ($\mathbb{R}^2$ の直線の方程式の具体例) 点 $A(1, 2)$, $B(3, -2)$ を通る直線の方程式を考える．まず

$$\boldsymbol{x}_0 = \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \tag{23}$$

とおく．$\boldsymbol{p}$ は**方向ベクトル**である．**直線の方程式のパラメータ表示**は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t+1 \\ -4t+2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

である．$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とおき t を消去すると，**直線の方程式の成分表示**は

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4} \tag{25}$$

であり，変形して

$$2x + y - 4 = 0 \tag{26}$$

である．**法線ベクトル**は $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ である．さらに変形して

$$y = -2x + 4 \tag{27}$$

となる．**傾き**は -2 であり，y **切片**は 4 である．さらに変形して

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 \tag{28}$$

となる．x **切片**は 2 であり，y 切片は 4 である．

例 2.10 ($\mathbb{R}^2$ の直線の方程式の具体例) 点 $A(1,2)$, $B(3,-2)$ を通る直線の方程式を考える．直線の方程式を

$$ax + by = 1 \tag{29}$$

と仮定する．点 A, B は直線上にあるので

$$a + 2b = 1, \qquad 3a - 2b = 1 \tag{30}$$

が成り立つ．この連立方程式を解くと

$$a = \frac{1}{2}, \qquad b = \frac{1}{4} \tag{31}$$

となる．直線の方程式を

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 \tag{32}$$

と得る．

2.6　$\mathbb{R}^3$ における直線の方程式

例 2.11 ($\mathbb{R}^3$ の直線の方程式の具体例) 点 $A(1,2,-1)$, $B(-1,3,-2)$ を通る直線の方程式を考える．直線は点 A を通り，方向ベクトルは $\overrightarrow{AB}$ である．すなわち，

$$\boldsymbol{x}_0 = \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

とおく．**直線の方程式のパラメータ表示**は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ 2+t \\ -1-t \end{bmatrix} \tag{34}$$

である．t を消去して**直線の方程式の成分表示**は

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1} \tag{35}$$

である．この方程式は 3 元 2 連立の方程式であることに注意する．例えば第 1, 2 式と第 2, 3 式の組で連立を組むと

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ -y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

となる．

2.7　内積

定義 2.12 (内積) $\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ に対して

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{k}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b} \tag{36}$$

なる二項演算を**内積（inner product）**または**スカラー積（scalar product）**という．

例 2.13 (内積の具体例) ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{37}$$

の内積は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 1 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 2 \tag{38}$$

である．

2.8　ノルム

定義 2.14 (ノルム) ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \tag{39}$$

をベクトル $\boldsymbol{a}$ の**ノルム（norm）**または**長さ（length）**という.

例 2.15 (ノルムの具体例) ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \tag{40}$$

のノルムはそれぞれ

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} a_k^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}\,, \tag{41}$$

$$\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} b_k^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \tag{42}$$

である.

2.9　ベクトルの成す角

定義 2.16 (ベクトルの成す角) $\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \tag{43}$$

により得られる θ をベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との**成す角（angular）**という. $\cos\theta$ を**方向余弦（direction cosine）**という.

例 2.17 (成す角の具体例) 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \in \mathbb{R}^3 \tag{44}$$

を考える. このとき方向余弦は

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \tag{45}$$

となるので, 成す角は

$$\theta = \arccos\frac{\sqrt{2}}{3} \simeq 0.34\pi \simeq 62^\circ \tag{46}$$

である.

2.10 ベクトルの直交

定義 2.18 (ベクトルの直交) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ のとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交する（orthogonal）**という．このとき $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ と表記する．

例 2.19 (ベクトルの直交の具体例)

$$\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{47}$$

を考える．このとき

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0 \tag{48}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は互いに直交する．

2.11 平行四辺形の面積

定理 2.20 (平行四辺形の面積) $\mathbb{R}^2$ 内の点 O, $A(\boldsymbol{a})$, $B(\boldsymbol{b})$, $D(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ を考える．このとき平行四辺形 $OADB$ の面積は

$$S = \mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right) = |a_1 b_2 - a_2 b_1|\,, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{49}$$

で与えられる．ただし $\mathrm{abs}(x) = |x|$ とする．

問 2.21 (平行四辺形の面積) これを証明せよ．

（証）角度 $\theta = \angle AOB$ とする．平行四辺形の面積は底辺の長さ $\|\boldsymbol{a}\|$ と高さ $\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$ を掛けたものであるので，これを計算すると

$$\begin{aligned} S &= \|\boldsymbol{a}\| \left(\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta\right) = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sqrt{1-\cos^2\theta} && (50) \\ &= \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - \left(\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta\right)^2} = \sqrt{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} && (51) \\ &= \sqrt{({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2) - (a_1b_1+a_2b_2)^2} = \sqrt{{a_1}^2{b_2}^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + {a_2}^2{b_1}^2} && (52) \\ &= \sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2} = |a_1b_2 - a_2b_1| && (53) \end{aligned}$$

を得る．

2.12 外積

定義 2.22 (外積) $\mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して，**外積** (outer product) または**ベクトル積**（vector product）は

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{54}$$

と表記する二項演算である．$\boldsymbol{c}$ の長さは $\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$ であり，$\boldsymbol{c}$ の向きは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に右手系で直交する方向である．

注意 2.23 (外積の長さ) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の長さは O, $A(\boldsymbol{a})$, $B(\boldsymbol{b})$, $D(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ を頂点とする平行四辺形の面積である．

注意 2.24 (右手系) 3 次元空間内の直交する座標軸 x, y, z を考える．軸のとり方は二通り存在する．親指，人差指，中指を互いに直交するように曲げる．このとき，これらの指の向きをそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸の向きとする．右手の指に対応させるときと，左手の指に対応させるときでは生成される座標軸は異なる．それぞれ**右手系**，**左手系**と呼ぶ．通常は右手系を使うことが多い．

注意 2.25 (外積の向き) 外積 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ では右手の親指，人差指，中指と $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を対応させる．

2.13 外積を成分で計算

定理 2.26 (外積の成分表示) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対して，

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \tag{55}$$

が成り立つ．

問 2.27 (外積の成分表示) これを示せ．

例 2.28 (外積の計算例) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ の外積は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 + \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 = -3\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{56}$$

である．

2.14 外積をベクトルで計算

例 2.29 (外積の計算例) $\mathbb{R}^3$ の軸 x_1, x_2, x_3 と同じ向きの単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{57}$$

を考える．このとき

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0}\,, \quad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}\,, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}\,, \tag{58}$$

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1\,, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2\,, \tag{59}$$

$$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1\,, \quad \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2 \tag{60}$$

が成り立つ．

例 2.30 (外積の計算例)

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 4\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2 + 6\boldsymbol{e}_3 \tag{61}$$

を考える．このとき外積は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3) \times (4\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2 + 6\boldsymbol{e}_3) \tag{62}$$

$$= 4\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 + 6\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 \tag{63}$$

$$+ 8\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 + 10\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 + 12\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 \tag{64}$$

$$+ 12\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 + 15\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 + 18\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 \tag{65}$$

$$= 4(\boldsymbol{0}) + 5\boldsymbol{e}_3 + 6(-\boldsymbol{e}_2) \tag{66}$$

$$+ 8(-\boldsymbol{e}_3) + 10(\boldsymbol{0}) + 12\boldsymbol{e}_1 \tag{67}$$

$$+ 12\boldsymbol{e}_2 + 15(-\boldsymbol{e}_1) + 18(\boldsymbol{0}) \tag{68}$$

$$= -3\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3 \tag{69}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{70}$$

となる．

2.15 スカラー三重積と平行六面体の体積

定義 2.31 (スカラー三重積) スカラー三重積（scalar triple vector）を

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} \tag{71}$$

と定義する．

定理 2.32 (スカラー三重積の値)

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{72}$$

（証明）

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\,. \tag{73}$$

問 2.33 (スカラー三重積と体積) 頂点が $O, A(\boldsymbol{a}), B(\boldsymbol{b}), C(\boldsymbol{c}), D(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}), E(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}), F(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}), G(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ である並行 6 面体の体積は $V = |[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]|$ である．これを示せ．

（答え）　平行 6 面体の体積は，底面積を S とし，高さを h とすると，$V = Sh$ で与えれる．底面の平行四辺形 $OABD$ の面積は，$S = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ である．また，底面に対する単位法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})/\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ である．ベクトル $\boldsymbol{c}$ を垂線に正射影してできるベクトルの長さが高さ h であるから，$h = |\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{c}| = |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|/\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ となる．よって体積は $V = |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|$ と求まる．

2.16 単位ベクトル

定義 2.34 (単位ベクトル) ノルムが 1 のベクトルを**単位ベクトル（unit vectar）** という．

定義 2.35 (正規化) あるベクトルを向きが同じで長さが 1 のベクトルに変換することを**正規化（normalization）**という．

例 2.36 (正規化の具体例) ベクトル $\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を正規化し $\boldsymbol{e}$ とする．すなわち

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{74}$$

と得られる．

定義 2.37 (単位方向ベクトル，単位法線ベクトル) 長さが 1 の方向ベクトルを**単位方向ベクトル（unit tangent vector）**という．長さが 1 の法線ベクトルを**単位法線ベクトル（unit normal vector）**という．

例 2.38 (単位ベクトル) 方程式

$$2x + y - 4 = 0 \tag{75}$$

の単位方向ベクトルは

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{76}$$

であり，単位法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{77}$$

である．

2.17　点の直線への正射影

定義 2.39 (点の直線への正射影) 点 A から直線 l に垂線を下ろした足 C を**正射影**という．点 A から点 C への変換を**射影変換**という．

例 2.40 (正射影の具体例) 点 $A(1,0,2)$, $B(0,2,3)$, $C(1,2,-1) \in \mathbb{R}^3$ を考える．点 C から直線 AB へ垂線を下ろした正射影を D とする．

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AD}$ とおく．このとき

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 2-0 \\ -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0-1 \\ 2-0 \\ 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|} \tag{78}$$

より

$$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e})\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}}\boldsymbol{b} = \frac{0 \times (-1) + 2 \times 2 + (-3) \times 1}{(-1) \times (-1) + 2 \times 2 + 1 \times 1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{79}$$

である．よって

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6-1 \\ 0+2 \\ 12+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 13 \end{bmatrix} \tag{80}$$

となるので,

$$D\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{13}{6}\right)$$

を得る．

2.18　点と直線との距離

定義 2.41 (点と直線との距離) 点 A と l 上の点 B との距離が最小となるとき，その距離を**点と直線との距離**という．

定理 2.42 (点と直線との距離) 点 A と l 上の点 B との距離が最小となるのは，直線 AB と直線 l が直交するときである．

定理 2.43 ($\mathbb{R}^2$ 内の点と直線の距離) $\mathbb{R}^2$ 空間内の点 $A(x_0, y_0)$ と直線 $ax + by + c = 0$ との距離は

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{81}$$

である．

問 2.44 ($\mathbb{R}^2$ 内の点と直線の距離) これを示せ．

問 2.45 ($\mathbb{R}^2$ 内の点と直線の距離) 点 $A(2,1)$ と直線 $x - 3y - 2 = 0$ との距離は

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \tag{82}$$

である．

2.19 平面の方程式

定理 2.46 (平面の方程式) $\mathbb{R}^n$ 空間内の超平面上の点 X の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0\,,\qquad \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{n}\in\mathbb{R}^n \tag{83}$$

と表される．ただし，$\boldsymbol{n}$ は方向ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n$ と直交するベクトルである．$\boldsymbol{n}$ を**法線ベクトル (normal vector)** という．

注意 2.47 ($\mathbb{R}^3$ の平面の方程式) $\mathbb{R}^3$ 内の平面の方程式は次のように表される．まず，基本は

$$ax+by+cz+d=0 \tag{84}$$

である．このとき，法線ベクトルは $\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ である．また，この式を変形して

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \tag{85}$$

と表す．このとき，法線ベクトルは $\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ であり，平面は点 (x_0,y_0,z_0) を通る．さらに変形して，

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{86}$$

とする．このとき平面と x 軸，y 軸，z 軸との交点はそれぞれ $x=a,\ y=b,\ z=c$ となる．

例 2.48 ($\mathbb{R}^3$ の平面の方程式の具体例) $\mathbb{R}^3$ 内の平面の方程式

$$x-2y+3z+4=0 \tag{87}$$

を考える．法線ベクトルは $\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$ である．また，方程式を変形して

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-\frac{4}{3}}=1 \tag{88}$$

を得る．平面は点 $(-4,0,0),\ (0,2,0),\ (0,0,-4/3)$ を通る．

2.20 外積を用いて平面の法線ベクトルを導出

例 2.49 ($\mathbb{R}^3$ の平面の方程式の具体例) 3 点 $A(1,1,-2),\ B(3,0,1),\ C(2,1,-1)$ を通る xyz 空間内の平面を考える．法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0\\3&1\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1+\begin{vmatrix}3&1\\p2&1\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2+\begin{vmatrix}2&1\\-1&0\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

であり，点 $A(1,1,-2)$ を通るので，$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\overrightarrow{OA})=0$ より平面の方程式

$$-(x-1)+(y-1)+(z+2)=0$$

を得る．一般形で書けば

$$x - y - z - 2 = 0$$

となる．さらに変形して

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{-2} + \frac{x}{-2} = 1$$

とする．平面と x 軸，y 軸，z 軸の交点はそれぞれ $x = 2, y = -2, z = -2$ である．

2.21　連立方程式を解いて平面の方程式を導出

例 2.50 ($\mathbb{R}^3$ の平面の方程式の具体例) 3 点 $A(1, 1, -2)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, 1, -1)$ を通る xyz 空間内の平面を考える．平面の方程式の一般形は

$$ax + by + cz + 1 = 0$$

であるから，これに各点の座標を代入すると連立方程式

$$a + b - 2c + 1 = 0, \quad 3a + c + 1 = 0, \quad 2a + b - c + 1 = 0$$

を得る．この方程式の解は

$$(a, b, c) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

である．よって平面の方程式は $x - y - z - 2 = 0$ となる．

注意 2.51 ($\mathbb{R}^3$ の平面の方程式と連立方程式) 平面は 3 点から一意に定まる．これは 3 元の連立方程式は 3 本の方程式により解が一意に定まることと等価である．

2.22　平面と直線の交点

例 2.52 (平面と直線の交点の具体例) 平面

$$x - y + 3z + 1 = 0 \tag{89}$$

と直線

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{4} \tag{90}$$

との交点を考える．直線の方程式のパラメータ表示は

$$x = 3t + 2\,, \quad y = -2t - 1\,, \quad z = 4t + 3 \tag{91}$$

である．これを平面の方程式に代入すると

$$(3t + 2) - (-2t - 1) + 3(4t + 3) + 1 = 0 \tag{92}$$

より

$$t = -\frac{13}{17} \tag{93}$$

を得る．直線の方程式のパラメータ表示に代入すると

$$x = -\frac{5}{17}\,, \quad y = \frac{9}{17}\,, \quad z = -\frac{13}{17} \tag{94}$$

となり，交点は $(-5/17, 9/17, -13/17)$ である．

2.23　点の平面への正射影

定義 2.53 (点の平面への正射影) 点 A から平面へ垂線を下ろしたときの足 B を**正射影**という．点 A から点 B への変換を**射影変換**という．

例 2.54 (点の平面への正射影) 点 $A(1,-2,4)$ の平面 $2x+3y-z+1=0$ への正射影 B を考える．平面の法線ベクトルは $\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}$ であるから，点 A を通り平面に垂直な直線の方程式は

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-1}=t \tag{95}$$

となる．パラメータ表示すると

$$x=2t+1\,,\quad y=3t-2\,,\quad z=-t+4 \tag{96}$$

である．これを平面の方程式に代入すると

$$2(2t+1)+3(3t-2)-(-t+4)+1=0 \tag{97}$$

より $t=1/2$ を得る．これを垂線の方程式に代入すると

$$x=2\frac{1}{2}+1=2\,,\quad y=3\frac{1}{2}-2=-\frac{1}{2}\,,\quad z=-\frac{1}{2}+4=\frac{7}{2} \tag{98}$$

であり，正射影 $B(2,-1/2,7/2)$ を得る．

2.24　点と平面との距離

定義 2.55 (点と平面との距離) 点 A と平面上のある点 B との距離が最小となるとき，その距離を**点と平面との距離**という．

定理 2.56 (点と平面との距離) 点 A と平面上の点 B との距離が最小となるのは直線 AB と平面が直交するときである．

例 2.57 (点と平面との距離) 点 $A(1,-2,4)$ の平面 $2x+3y-z+1=0$ への正射影は $B(2,-1/2,7/2)$ である．直線 AB は平面に直交する．距離 $\overline{AB}$ が点と平面との距離である．よって距離は

$$\sqrt{(2-1)^2+\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2+\left(\frac{7}{2}-4\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{2}} \tag{99}$$

である．

定理 2.58 ($\mathbb{R}^3$ の点と平面との距離) $\mathbb{R}^3$ 空間内の点 $A(x_0,y_0,z_0)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ を考える．点 A と平面との距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{100}$$

である．

問 2.59 ($\mathbb{R}^3$ の点と平面との距離) これを示せ.

例 2.60 ($\mathbb{R}^3$ の点と平面との距離) 点 $A(1,-2,4)$ の平面 $2x+3y-z+1=0$ との距離は

$$\frac{|2\cdot 1+3\cdot(-2)-4+1|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}=\frac{|-7|}{\sqrt{14}}=\frac{7}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{7}{2}} \tag{101}$$

である.

2.25 平面と平面の交線

例 2.61 (平面と平面の交線) 二つの平面

$$x-y-z=-1, \qquad 2x+y+4z=1 \tag{102}$$

の交線を求める．第一式を -2 倍し第二式の加えると

$$x-y-z=-1, \qquad 3y+6z=3 \tag{103}$$

となる．第二式を 3 で割ると

$$x-y-z=-1, \qquad y+2z=1 \tag{104}$$

となる．第二式を第一式に加えると

$$x+z=0, \qquad y+2z=1 \tag{105}$$

となる．$z=t$ とおくと

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -t \\ -2t+1 \\ t \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{106}$$

を得る．交線は点 $(0,1,0)$ を通る方向ベクトル $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ の直線である.

2.26 演習問題 〜 直線

問 2.62 ($\mathbb{R}^2$ の直線) 点 $(3,5)$, $(2,-1)$ を通る直線の方程式を求めよ.

問 2.63 ($\mathbb{R}^2$ の直線) 点 $(3,5)$ を通り方向ベクトルが$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$の直線の方程式を求めよ.

問 2.64 ($\mathbb{R}^2$ の直線) 点 $(3,5)$ を通り法線ベクトルが$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$の直線の方程式を求めよ.

問 2.65 ($\mathbb{R}^2$ の直線) 傾きが 2, y 切片が -1 の直線の方程式を求めよ.

問 2.66 ($\mathbb{R}^2$ の直線) x 切片が 2, y 切片が -1 の直線の方程式を求めよ.

問 2.67 ($\mathbb{R}^2$ の直線) 次の $\mathbb{R}^2$ の直線に関して，傾き，y 切片，x 切片，方向ベクトル，法線ベクトルを求めよ．また，この直線に直交し原点を通る法線を求めよ．

(1) $y = 3x - 2$ (2) $3x - 2y + 5 = 0$ (3) 2 点 $(3, 2)$, $(1, -2)$ を通る直線

(4) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2}$ (5) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 1$

問 2.68 ($\mathbb{R}^2$ の直線) 次の $\mathbb{R}^2$ の直線をパラメータ表示で表せ．また，直線の方向ベクトル，法線ベクトル，x 切片，y 切片，傾きを求めよ．さらには，この直線に直交し点 $(1, 2)$ を通る法線を求めよ．

(1) 点 $(1, -1)$, $(2, 3)$ を通る直線 (2) 点 $(0, 2)$, $(1, 0)$ を通る直線

(3) 点 $(-3, 1)$, $(4, 2)$ を通る直線 (4) 点 $(2, 1)$, $(5, -1)$ を通る直線

(5) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{4}$ (6) $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+2}{-3}$ (7) $\dfrac{x-5}{-3} = \dfrac{y-3}{5}$

(8) $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{-1}$ (9) $y = 2x - 1$ (10) $y = -2x + 3$ (11) $y = 4x - 3$ (12) $y = -3x - 5$

(13) $3x + 2y + 5 = 0$ (14) $-x + y + 1 = 0$ (15) $2x - y - 2 = 0$ (16) $-x - 3y + 1 = 0$

(17) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$ (18) $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{4} = 1$ (19) $\dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{-5} = 1$ (20) $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{-3} = 1$

問 2.69 ($\mathbb{R}^3$ の直線) 点 $(2, 1, 3)$ を通り方向ベクトルが $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ の直線の方程式を求めよ．

問 2.70 ($\mathbb{R}^3$ の直線) 次の $\mathbb{R}^3$ の直線の方向ベクトルと直線上の点を 1 つ答えよ．

(1) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+1}{3}$ (2) $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$ (3) $\dfrac{x}{-2} = y = -z$

(4) $x = 3, \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$ (5) $x = 3, y + 2z + 1 = 0$ (6) $y = -1, \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{z}{2}$

(7) $y = -1, 2x + 3z + 4 = 0$ (8) $z = 2, \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-3}$ (9) $z = 2, 3x + 2y = 1$

問 2.71 ($\mathbb{R}^3$ の直線) 次の 2 点を通る $\mathbb{R}^3$ の直線をパラメータ表示と成分表示で表せ．

(1) 点 $(1, 2, -1)$, $(0, 2, 1)$ (2) 点 $(1, 2, -1)$, $(0, 1, 2)$ (3) 点 $(0, 1, 2)$, $(-1, 2, -1)$

(4) 点 $(4, 0, 2)$, $(2, -1, 0)$ (5) 点 $(0, 1, 2)$, $(3, -1, 0)$

問 2.72 ($\mathbb{R}^3$ の直線) $\mathbb{R}^3$ の 3 点 $(-2, 4, 5)$, $(1, p, 2)$, $(0, 1, q)$ が，1 直線にあるような p, q の値を求めよ．

問 2.73 ($\mathbb{R}^3$ の直線) 次の $\mathbb{R}^3$ の直線と直交し点 $(1, 2, 3)$ を通る直線の方程式を求めよ．また，その交点を求めよ．

(1) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$ (2) $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-2}$

2.27 演習問題 〜 内積，ノルム，外積

問 2.74 (内積，ノルム，外積) $\mathbb{R}^3$ のベクトルに対して，次の関係式が成り立つこと証明せよ．

(1) $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$ (2) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$ (3) $(\alpha \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ (4) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

(5) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} > 0$ (6) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ (7) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2$ (8) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$

(9) $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leq \|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\|$ (10) $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ (11) $-1 \leq \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \leq 1$

(12) $\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2)$ (13) $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|^2 - \|\boldsymbol{b}\|^2$

(14) $\|\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 \pm 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ (15) $\left\| \dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \pm \dfrac{\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|^2} \right\|^2 = \dfrac{\|\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}\|^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2}$

(16) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ (17) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ (18) $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ (19) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$

(20) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ (21) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

(22) $(\alpha\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\alpha(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\alpha\boldsymbol{b})$ (23) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$ (24) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$

(25) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ (26) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$

(27) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ (28) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=0$

(29) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ (30) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$

(31) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}))=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}$

(32) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}]\boldsymbol{c}-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\boldsymbol{d}$ (33) $[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]^2$

(34) $[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{f}]=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}][\boldsymbol{c},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}]-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}][\boldsymbol{d},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}]$

(35) $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}][\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{l} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{m} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{l} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{m} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{l} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{m} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}\end{vmatrix}$

問 2.75 (内積) 次の 2 つのベクトルのノルムをそれぞれ求めよ．またこれらの内積，方向余弦，成す角を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\\sqrt{3}\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\3\\0\end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\1\\-1\end{bmatrix}$

問 2.76 (方向余弦) $\mathbb{R}^3$ の 3 点 $O(0,0,0)$, $A(1,-2,2)$, $B(3,4,0)$ に対して，方向余弦 $\cos\angle AOB$ を求めよ．また，$\triangle OAB$ の面積を求めよ．

問 2.77 (直交) 次のベクトルに直交するベクトルを 1 つ求めよ．

(1) $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\-1\end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix}2\\0\\-1\\1\\3\end{bmatrix}$

問 2.78 (外積) 次のベクトルの外積を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$

問 2.79 (外積) 次の外積を計算せよ．

(1) $(2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\times(12\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3)$ (2) $(-2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_3)\times(-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)$

(3) $(2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\times(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_3)$

ただし，$\mathbb{R}^3$ の基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ とする．

問 2.80 (外積) ベクトル $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$ に対して次を求めよ．

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}$ (2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ (3) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ (4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ (5) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ (6) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (7) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

(8) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$ (9) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ (10) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ (11) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$

問 2.81 (右手系) ベクトル $\boldsymbol{c}$ はベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に垂直なベクトルであり，かつ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ はこの順序で右手系をなすとする．$\boldsymbol{c}$ を求めよ．

(1) $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{e}_1 - 6\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3$ (2) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$

(3) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3$

問 2.82 (右手系) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ はこの順で右手系であり，お互いに直交するとする．$\boldsymbol{c}$ を求めよ．

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (2) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ (3) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

問 2.83 (平行四辺形の面積) 次の $\mathbb{R}^2$ の 4 点からなる平行四辺形の面積を求めよ．

(1) $(0,0), (1,3), (3,4), (2,1)$ (2) $(0,0), (-3,1), (-1,3), (2,2)$

(3) $(-2,0), (0,2), (3,0), (1,-2)$

問 2.84 (平行四辺形の面積) 次の $\mathbb{R}^3$ の 4 点からなる平行四辺形の面積を求めよ．

(1) $(0,0,0), (0,1,0), (1,1,0), (1,2,0)$ (2) $(4,-2,6), (6,-1,7), (5,0,5), (3,3,0)$

(3) $(1,2,3), (2,-1,1), (1,2,-4), (1,-3,-9)$

問 2.85 (平行六面体の体積) 次の $\mathbb{R}^3$ の 8 点からなる平行六面体の体積を求めよ．

(1) $(0,0,0), (0,1,0), (1,1,0), (1,2,0), (1,0,1), (1,1,1), (2,1,1), (2,2,1)$

(2) $(1,2,3), (2,-1,1), (1,2,-4), (1,-3,-9), (0,3,2), (1,0,0), (0,3,-5), (0,-2,-10)$

2.28 演習問題 〜 単位ベクトル，正射影，点と直線の距離

問 2.86 (正射影) 点 A から直線 BC への正射影 D を求めよ．また距離 AD を求めよ．

(1) $A(1,1), B(0,0), C(3,2)$ (2) $A(1,1), B(2,-1), C(3,2)$

(3) $A(-2,3), B(1,0), C(0,1)$ (4) $A(0,-2), B(3,-1), C(4,2)$

(5) $A(1,1,1), B(0,0,0), C(2,-1,3)$ (6) $A(1,1,1), B(3,1,2), C(2,-1,3)$

(7) $A(-1,0,2), B(1,0,-1), C(0,1,0)$ (8) $A(5,-2,3), B(1,-2,3), C(2,1,-3)$

問 2.87 (正射影) 点 A と直線 ℓ の距離を求めよ．

(1) $\ell : x + 2y = 1, \quad A(-1,2)$ (2) $\ell : y = -3x + 2, \quad A(5,-3)$

(3) $\ell : -3x + y - 5 = 0, \quad A(3,4)$ (4) $\ell : 2x + y + 1 = 0, \quad A(1,1)$

(5) $\ell : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{-1}, \quad A(1,-2,2)$ (6) $\ell : x = 3, \ \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{3}, \quad A(5,3,2)$

(7) $\ell : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{-1} = z - 2, \quad A(0,1,3)$ (8) $\ell : y = -2, \ \dfrac{x}{3} = \dfrac{z-2}{-1}, \quad A(1,-4,2)$

問 2.88 (点と直線の距離) 点 A と直線 BC の距離を求めよ．

(1) $A(2,3), B(1,-1), C(-1,2)$ (2) $A(-1,0), B(0,1), C(2,1)$

(3) $A(1,-1), B(2,3), C(1,1)$ (4) $A(0,1), B(2,-1), C(2,1)$

(5) $A(1,-2,1), B(3,1,0), C(2,3,-1)$ (6) $A(2,0,-1), B(-1,2,1), C(3,0,1)$

(7) $A(0,1,0), B(1,1,0), C(0,1,1)$ (8) $A(0,1,-1), B(2,3,1), C(1,0,2)$

2.29 演習問題 〜 平面

問 2.89 (平面) 次の $\mathbb{R}^3$ の平面の法線ベクトルと x 軸，y 軸，z 軸との交点を求めよ．

(1) $2x - y + 3z + 4 = 0$ (2) $x + 3y - 2z = 3$ (3) $2y - z + 3 = 0$ (4) $x - z = 2$
(5) $-2x + 3z - 1 = 0$ (6) $x = 1$ (7) $y = -3$ (8) $z + 5 = 0$

問 2.90 (平面) 次の $\mathbb{R}^3$ の 3 点を通る平面の方程式を求めよ．

(1) 点 $(1, 2, -1)$, $(0, 2, 1)$, $(0, 2, 1)$ (2) 点 $(1, 2, -1)$, $(0, 1, 2)$, $(3, -1, 0)$
(3) 点 $(0, 1, 2)$, $(-1, 2, -1)$, $(2, 0, -3)$ (4) 点 $(4, 0, 2)$, $(2, -1, 0)$, $(2, 1, 1)$
(5) 点 $(0, 1, 2)$, $(3, -1, 0)$, $(2, 4, 0)$

問 2.91 (直線と平面の交点) 次の $\mathbb{R}^3$ の直線と平面の交点を求めよ．

(1) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{y+2}{-2}$, $3x + 2y + z = 1$
(2) $\dfrac{x+2}{-2} = y - 3 = \dfrac{y-1}{-3}$, $2x - y + 3z + 2 = 0$

問 2.92 (直線と平面の交点) 平面 α は平面 π と平行で点 A を通るとする．平面 α の方程式を求めよ．また，平面 α と直線 L との交点を求めよ．

(1) $\pi : x + 3y + 2z + 1 = 0$, $A(1, -1, -2)$, $L : \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$
(2) $\pi : 2x - y + z - 1 = 0$, $A(1, 0, 4)$, $L : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{-2}$

問 2.93 (点の平面への正射影) 次の $\mathbb{R}^3$ の点から平面への正射影を求めよ．

(1) $(1, -1, 2)$, $2x - y + 3z = 1$ (2) $(2, 0, -1)$, $x + y - 2z + 3 = 0$

問 2.94 (点と平面の距離) 次の $\mathbb{R}^3$ の点と平面の距離を求めよ．

(1) $(0, 3, 1)$, $-3x - y + z + 2 = 0$ (2) $(1, 1, 0)$, $y + z = 1$

問 2.95 (平面の交線) 次の $\mathbb{R}^3$ の平面の交線の方向ベクトルを求めよ．

(1) $2x + 3y = 1$, $3y + 4z = 2$ (2) $2x + 3y - z = 1$, $x - 2y + z = -1$
(3) $2x + 3y + z + 1 = 0$, $x - y + 2z - 1 = 0$ (4) $x - y + 2z - 2 = 0$, $3x + 2y - z + 5 = 0$

問 2.96 (平面と直線) 次の $\mathbb{R}^3$ の平面と直交し点 $(1, 2, 3)$ を通る直線の方程式を求めよ．また，その交点を求めよ．

(1) $2x + 3y + 1 = 0$ (2) $-x + 2y - 2 = 0$ (3) $3x - y + 2 = 0$ (4) $-3x - 2y + 3 = 0$

問 2.97 (直線の平面への正射影) $\mathbb{R}^3$ の直線 $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-2}{4}$ を平面 $3x + 2y - y = 5$ へ正射影した直線を求めよ．

問 2.98 (総合) 3 次元空間内の点 $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(3, 0, -2)$, $P(1, 1, 0)$ を考える．点 C から直線 AB に垂線を下ろしたときの足を D とする．3 点 A, B, C を通る平面を H とする．点 P から平面 H への垂線を L とする．平面 H と 直線 L の交点を Q とする．このとき，$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{d}$ とおく．次の問 (1)–(14) に答えよ． (1) ベクトル $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ のノルムをそれぞれ求めよ． (2) 内積 $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$ を求めよ． (3) 角 $\theta = \angle BAC$ を示せ． (4) ベクトル $\boldsymbol{b}$ を正規化したベクトル $\boldsymbol{e}$ を示せ． (5) ベクトル $\boldsymbol{d}$ をベクトル $\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{c}$ を用いて表せ． (6) 点 D の座標を求めよ． (7) 点 C と直線 AB との距離を求めよ． (8) 外積 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ を求めよ． (9) 平面 H の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求

めよ． (10) 平面 H 上の点 (x, y, z) が満たす方程式を示せ． (11) 直線 L 上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ をパラメータ t を用いて表せ． (12) 直線 L 上の点 (x, y, z) が満たす方程式を示せ． (13) 点 Q の座標を求めよ． (14) 点 P と平面 H との距離を求めよ．

問 2.99 (総合) xyz 空間内に点 $A(2, 0, -1)$, $B(1, 3, 0)$, $C(0, 1, -2)$, $P(-5, 1, 3)$ がある．
次の問 (1)–(9) に答えよ． (1) 方向余弦 $\cos\angle CAB$, $\cos\angle ABC$, $\cos\angle BCA$ を求めよ． (2) 直線 AB の単位方向ベクトルを求めよ． (3) 直線 AB の方程式を成分表示で書け． (4) 点 C の直線 AB への正射影 D の座標を求めよ． (5) 点 C と直線 AB との距離を求めよ． (6) 点 A, B, C を通る平面 H の法線ベクトルを求めよ． (7) 平面 H の方程式を成分表示で書け． (8) 点 P の平面 H への正射影 Q の座標を求めよ． (9) 点 P と平面 H との距離を求めよ．