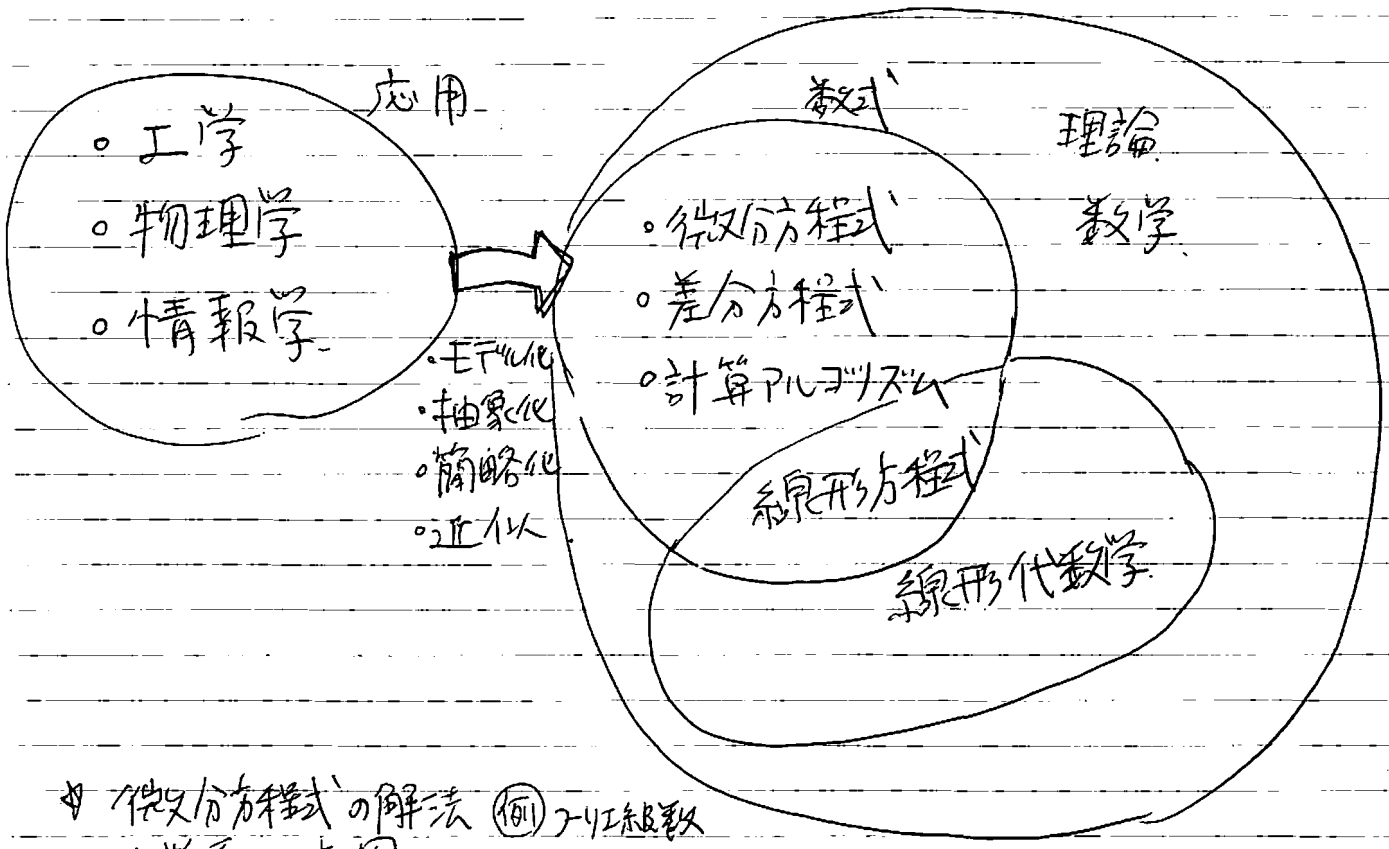


# まえがき

- ① 線形変換の例題 (線形代数学I,IIの復習および補足)
- ② 微分方程式, 差分方程式への応用 (解法および解析)
- ③ 固有値分解の数値計算 (コンピュータでの計算方法)



★ 微分方程式の解法 (例) マトリクス

★ 力学系への応用  
— ニュートンの運動方程式の解法および解析

★ 工学, 情報学への応用

- 信号処理 (音声, 画像, ...) (例) CTスキャン
- 統計処理 (例) 株価予測, 天気予報
- 情報処理 (例) 検索エンジン
- コンピュータグラフィックス

★ 現代ではコンピュータでの解析手法としての応用

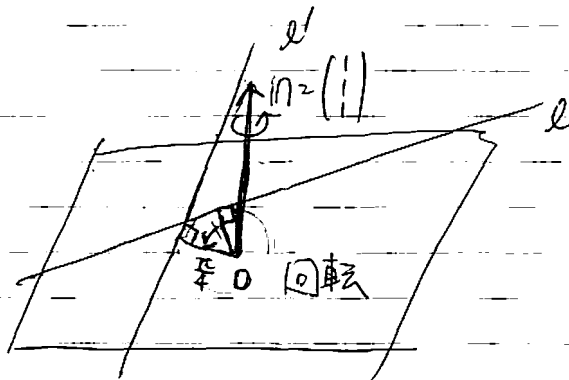
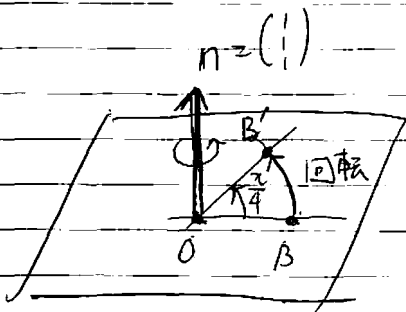
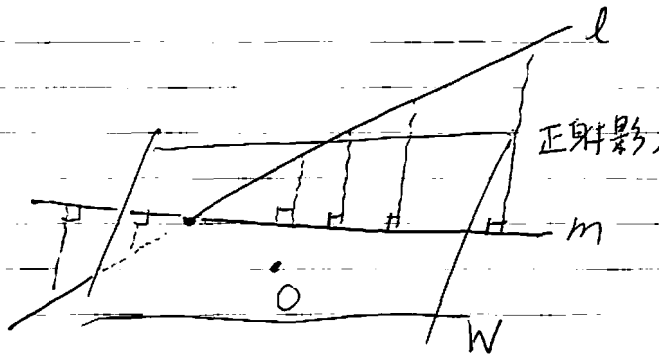
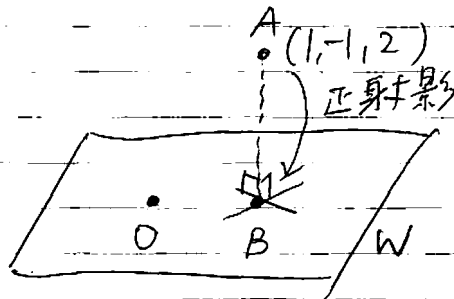
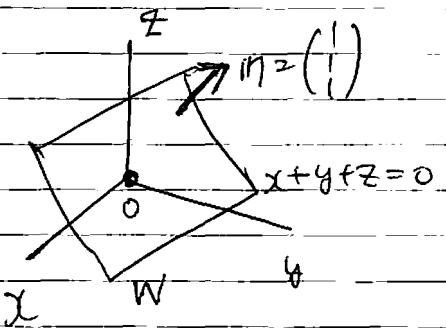
# 線形変換

## 課題

$\mathbb{R}^3$  の点  $(1, -1, 2)$  と直線  $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3}$  とを

平面  $x+y+z=0$  に正射影せよ。また、その後に、

平面の法線ベクトル  $(1, 1, 1)$  を軸として  $\frac{\pi}{4}$  回転せよ。

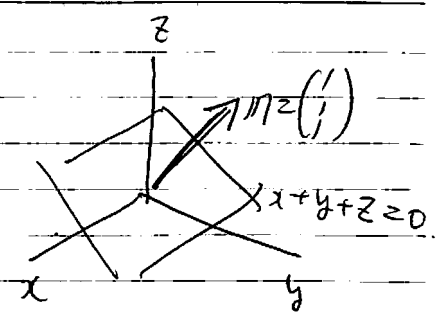


## § 部分空間

平面  $x+y+z=0$  は方程式  $x+y+z=0$  の 解空間

$$W = \{ (x, y, z) \mid x+y+z=0 \}$$

である。  $W$  の 基底 を求める。



$$x+y+z=0 \Leftrightarrow (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} Ax=0 \\ \text{rank}(A)=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{自由変数は} \\ 3 - \text{rank}(A) = 2 \text{ 個 である。} \end{array}$$

$z = -x-y$  より,  $x=c_1, y=c_2$  ( $\forall c_1 \in \mathbb{R}, \forall c_2 \in \mathbb{R}$ ) とおく。

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 p_1 + c_2 p_2$$

よって, より  $W$  は  $p_1$  と  $p_2$  で張られる空間

$$W = \langle p_1, p_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \{ c_1 p_1 + c_2 p_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$$

である。  $\{p_1, p_2\}$  は 1次独立 であるから,  $\{p_1, p_2\}$  は  $W$  の 基底 である。

**(注)**  $W$  は  $\mathbb{R}^3$  の 部分空間 である。 次元 は  $\dim(W) = 2$  となる。

**(定義)**  $n$ 次元空間  $V$  の 部分集合  $W$  が  $n$ 次元空間 であるとき  $W \subseteq V$  の 部分空間 といふ。

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} W \ni x, y \\ \mathbb{R} \ni \alpha, \beta \end{array} \right\} \text{に対して } \alpha x + \beta y \in W.$$

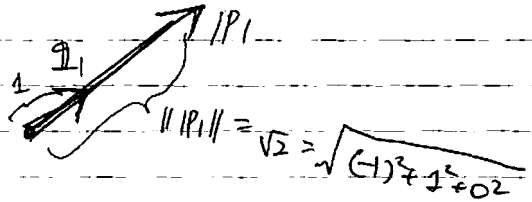
**(注)** 必ず  $0 \in W$  である。  
原点  $0$  を含む。

## § 正規直交化

$W$  の基底  $\{p_1, p_2\}$  を正規直交化しておくと、後で便利である。

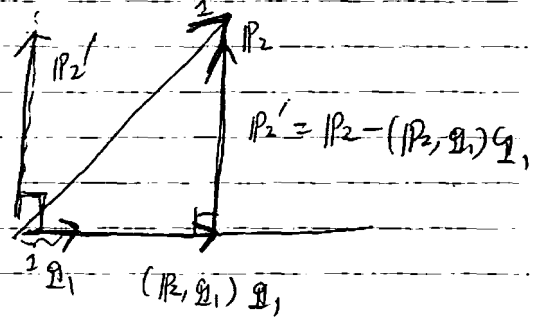
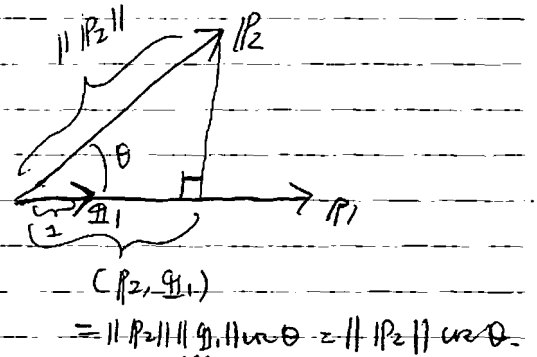
まず、 $p_1$  を規格化して

$$q_1 = \frac{p_1}{\|p_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



と置く。次に、 $q_1$  と直交するベクトルを

$$\begin{aligned} p_2' &= p_2 - (p_2, q_1) q_1 \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1+0+0}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2+1 \\ 0-1 \\ 2+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



と求める、 $p_2'$  を規格化して、

$$q_2 = \frac{p_2'}{\|p_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

と置く。以上より、

$$(q_1, q_1) = 1, (q_1, q_2) = 0, (q_2, q_2) = 1$$

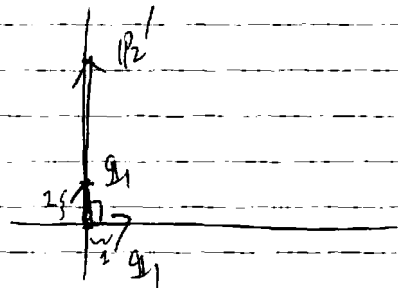
が成り立つので、

$$\{q_1, q_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

は  $W$  の正規直交基底である。 $W$  は

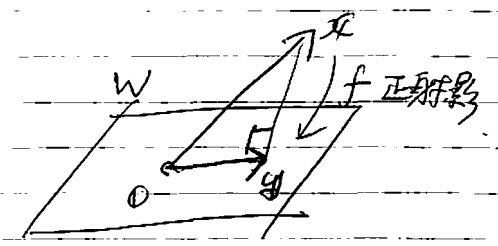
$$W = \langle q_1, q_2 \rangle_{\mathbb{R}}$$

とも書ける。



# § 正射影

点  $x$  を平面  $W$  に垂直に下した点を  $y$  とする。

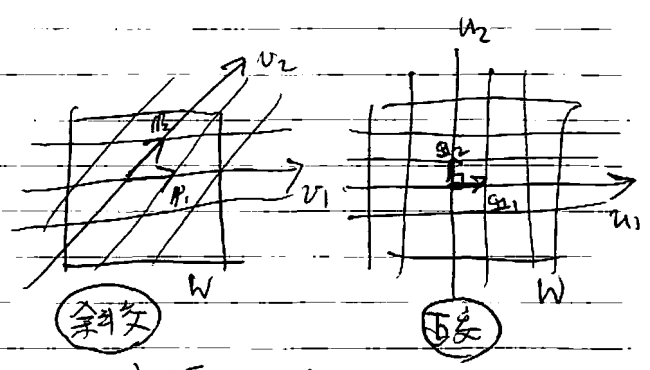


変換  $f: x \mapsto y$  を 正射影 とよぶ。

$$\mathbb{R}^3 \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

変換  $y = f(x)$  を求める。

$y$  は  $W$  上の点であるから、 $y \in W$  であり



$$W \ni y = u_1 g_1 + u_2 g_2$$

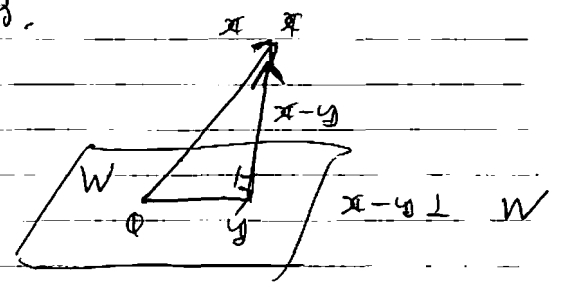
と表す。  $(u_1, u_2)$  は 基底  $\Sigma = \{g_1, g_2\}$  に対する  $W$  の 座標 である。

(注)  $W \ni y = u_1 p_1 + u_2 p_2 \dots$  と書いても可なり、  
 $\{p_1, p_2\}$  は 斜交座標 であり、後で計算がめんどうになる。

正規直交基底  $\{g_1, g_2\}$  を用いた方が楽である。

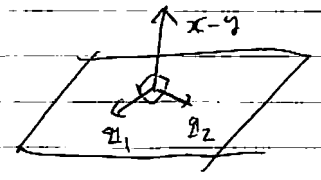
## 導出 1

⊗ II)  $x - y$  と  $W$  は直交



$$x - y \perp W$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y \perp g_1 \\ x - y \perp g_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y, g_1) = 0 \dots \textcircled{1} \\ (x - y, g_2) = 0 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$



① 式)  $(x - y, g_1) = (x, g_1) - (y, g_1) = (x, g_1) - (u_1 g_1 + u_2 g_2, g_1)$   
 $= (x, g_1) - u_1 \underbrace{(g_1, g_1)}_1 - u_2 \underbrace{(g_2, g_1)}_0 = (x, g_1) - u_1 = 0$

$$\Rightarrow u_1 = (x, g_1)$$

② 式)  $(x - y, g_2) = (x, g_2) - (y, g_2) = (x, g_2) - (u_1 g_1 + u_2 g_2, g_2)$   
 $= (x, g_2) - u_1 \underbrace{(g_1, g_2)}_0 - u_2 \underbrace{(g_2, g_2)}_1 = (x, g_2) - u_2 = 0$

$$\Rightarrow u_2 = (x, g_2)$$

よって、正射影は

$$f: X \mapsto y = u_1 g_1 + u_2 g_2 = (X, g_1) g_1 + (X, g_2) g_2$$

と得られる。

正規直交基底における座標

(注) 一般に、正規直交基底  $\{g_1, \dots, g_n\}$  における座標  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  は、

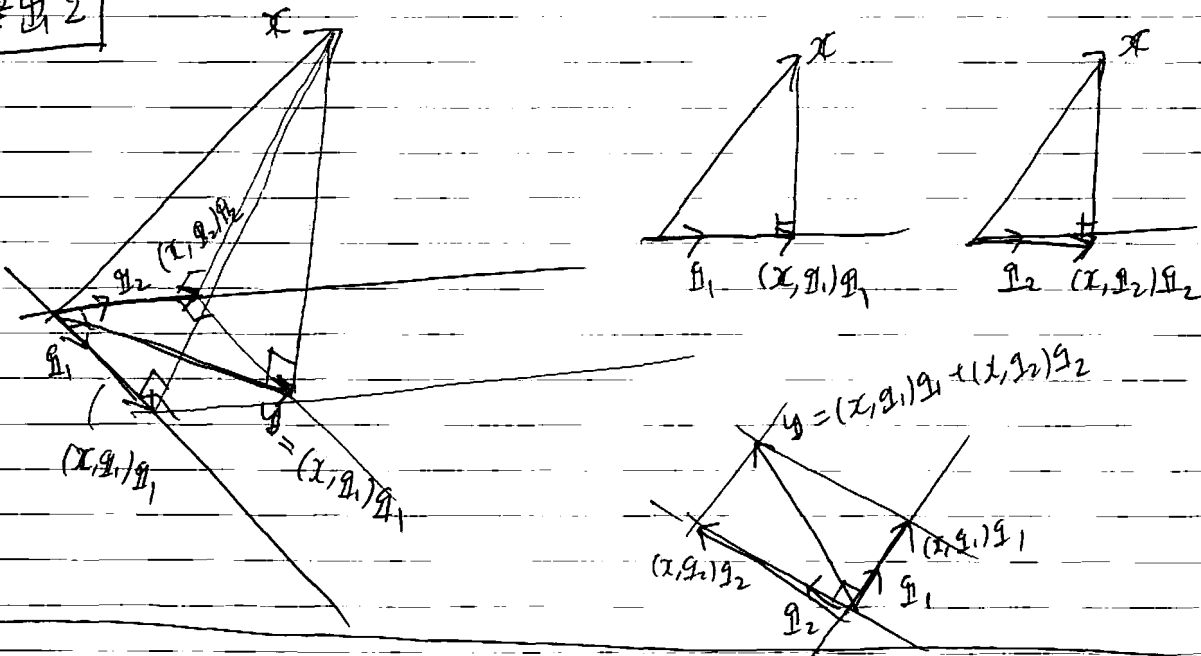
$$u_1 = (X, g_1), u_2 = (X, g_2), \dots, u_n = (X, g_n)$$

で求まる。

(\*)  $X = u_1 g_1 + u_2 g_2 + \dots + u_n g_n$  の両辺と  $g_\lambda$  の内積をとり、 $(g_\lambda, g_\lambda) = \delta_{\lambda, \lambda}$  より

$$\begin{aligned} (X, g_\lambda) &= (u_1 g_1 + \dots + u_\lambda g_\lambda + \dots + u_n g_n, g_\lambda) \\ &= u_1 \underbrace{(g_1, g_\lambda)}_0 + \dots + u_\lambda \underbrace{(g_\lambda, g_\lambda)}_1 + \dots + u_n \underbrace{(g_n, g_\lambda)}_0 \\ &= u_\lambda \end{aligned}$$

導出2



(例) 周期  $2\pi$  の関数空間 (正規直交基底) の基底  $\{ \dots, e^{-2ix}, e^{-ix}, 1, e^{ix}, e^{2ix}, \dots \}$  は  
内積  $(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx$  のもとで正規直交基底である。よって、

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nix}, \quad c_n = (f, e^{nix}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-nix} dx$$

と表される。フーリエ級数展開である。

## § 表現行列

### 射影変換

$$y = f(x) = (x, y_1) y_1 + (x, y_2) y_2$$

### と行列表現

$$y = f(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

で表す。Aをfの表現行列とよぶ。

### 定義

$$f: \text{線形変換} \iff f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

(注) 射影変換は線形変換である。(例) 示す。

### 定理

任意の線形変換  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は  $y = f(x) = Ax$  と表される。

### 導出1

$\mathbb{R}^3$  の標準基底を  $\{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  とおく。

よって

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

と表される。fは線形変換であるから、

$$y = f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Ax$$

と書ける。fの表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{pmatrix}$$

と表す。

2271

$$\begin{aligned}
 f(e_1) &= (e_1, g_1)g_1 + (e_1, g_2)g_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{-1+0+0}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1+0+0}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3+1 \\ -3+1 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(e_2) &= (e_2, g_1)g_1 + (e_2, g_2)g_2 = \frac{0+1+0}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{0+1+0}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3+1 \\ -3+1 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

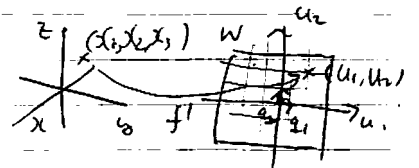
$$f(e_3) = (e_3, g_1)g_1 + (e_3, g_2)g_2 = \frac{0+0+0}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{0+0-2}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

∴, 表現行列は

$$A = (f(e_1) \ f(e_2) \ f(e_3)) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

と得られる。

**例 2** 正方, 射影変換  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow W$  と表わす。



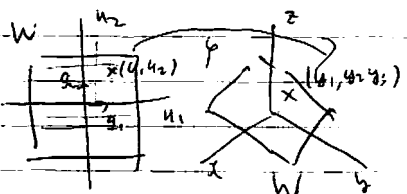
$$\begin{cases} u_1 = (g_1, x) = g_1^T x \\ u_2 = (g_2, x) = g_2^T x \end{cases} \quad \text{∴} \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1^T \\ g_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と表わす。

$$\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = u_1 g_1 + u_2 g_2 = (g_1 \ g_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \text{∴ 射影変換と}$$

$$f = \varphi \circ f' : \mathbb{R}^3 \rightarrow W \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{∴} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (g_1 \ g_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (g_1 \ g_2) \begin{pmatrix} g_1^T \\ g_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{と得られる}$$



## § $n$ 次等行列

**問**  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  がい  $A^2 = A$  であることを示せ。

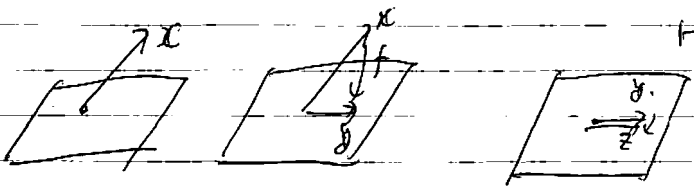
**定義**  $A$  :  $n$ 次等行列  $\Leftrightarrow A^2 = A$ .

**問**  $A^k = A$  ( $k=2,3,4,\dots$ ) を示せ。

**定理**  $f$  : 射影変換  $\Leftrightarrow A$  :  $n$ 次等行列。

**注**

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C} &\xrightarrow{f} y = f(x) = Ax \xrightarrow{f} z = f(f(x)) = f \circ f(x) = A^2x = Ax = y = Iy \\
 &\xrightarrow{f} w = \underbrace{f \circ f \circ f(x)}_3 = A^3x = Ax = y \xrightarrow{f} \dots \\
 &\hspace{15em} \underbrace{\hspace{10em}}_{Iy}
 \end{aligned}$$



★ 2回目以降の変換は変化がない。(恒等的) であり

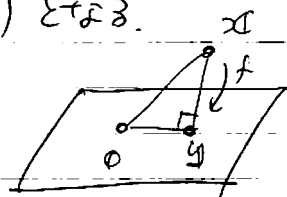
$$\Leftrightarrow A^k = A$$

### § 正射影の例

問 6

点  $(1, -1, 2)$  を平面  $W$  へ正射影すると点  $(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$  となる。

$$\textcircled{1} \quad y = Ax = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$



問 7

直線  $l: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3}$  を  $W$  へ正射影する。

直線  $l$  の  $x$ - $y$  表示を求めよ

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t+3 \\ -t-2 \\ 3t+1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = t\alpha + x_0$$

である。直線  $l$  は点  $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  を通る方向ベクトル  $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  の直線である。  
 $x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_0, \alpha$  を正射影して

$$y_0 = Ax_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b = A\alpha = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

となる。直線  $l$  を正射影した直線  $m$  は

方向ベクトル  $b$  で点  $y_0$  を通る直線であるから、  
103  $x$ - $y$  表示は

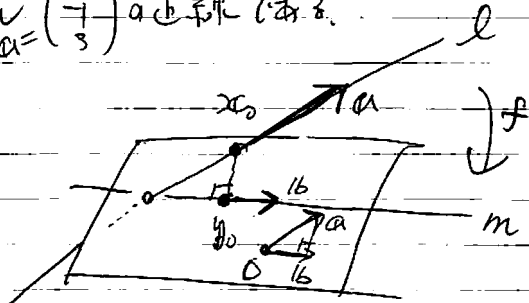
$$x = t b + y_0 = \frac{t}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。成分で表すと、

$$\frac{3x-7}{2} = \frac{3y+8}{-7} = \frac{3z-1}{5}$$

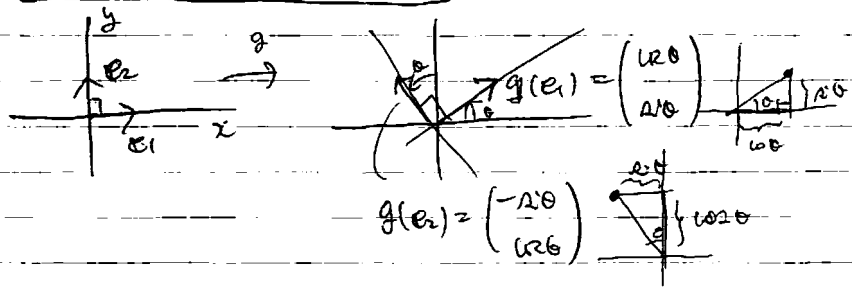
と得られる。

②  $m$  が  $W$  上にあることを確認せよ。



### § 回転変換

$\mathbb{R}^2$  における回転変換  $g: x \mapsto y$  を表す。図 5/1.



$$\begin{aligned}
 y &= g(x) \\
 &= g(x_1 e_1 + x_2 e_2) \\
 &= x_1 g(e_1) + x_2 g(e_2) \\
 &= (g(e_1) \ g(e_2)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
 &= R x
 \end{aligned}$$

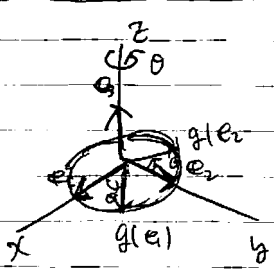
**定義**

$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  : 回転行列

- 問題**
- (1)  $R^T R = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R$  : 直交行列
  - (2)  $R^{-1} = R^T$
  - (3)  $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$
  - (4)  $R(\theta)R(\phi) = R(\theta + \phi)$

$\mathbb{R}^3$  における回転変換  $g: x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$  を表す。

z 軸まわり の回転変換の場合。  $g_3: x \mapsto y$

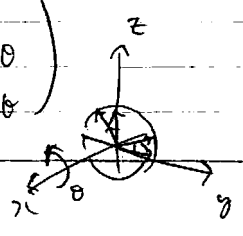


$$\begin{aligned}
 g_3(e_1) &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3(e_3) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 図 5/2} \\
 R_3 &= (g_3(e_1) \ g_3(e_2) \ g_3(e_3)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

x 軸まわり の回転変換の場合

$g_1: x \mapsto y$

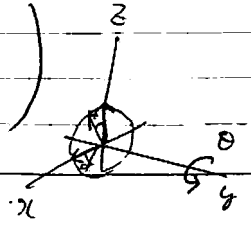
$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



y 軸まわり の回転変換の場合

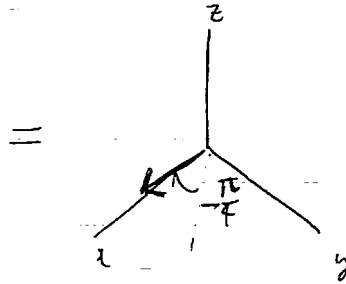
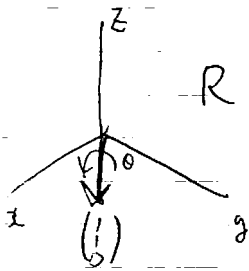
$g_2: x \mapsto y$

$$R_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$



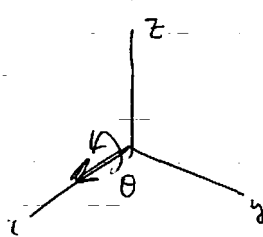
### § 回転変換の例

例)  $\mathbb{R}^3$  において, 方向ベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  を軸とする回転変換 (角度:  $\theta$ )

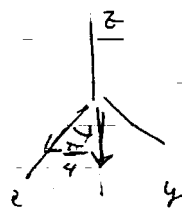


$$R_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$R = R_3\left(\frac{\pi}{4}\right) R_1(\theta) R_3\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

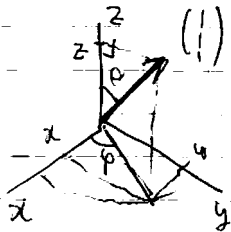


$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



$$R_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

例)  $\mathbb{R}^3$  において, 方向ベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  を軸とする回転変換 (角度:  $\alpha$ )



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos\theta \cos\varphi \\ r \cos\theta \sin\varphi \\ r \sin\theta \end{pmatrix}$$

と極座標で表すと、 $r, \theta, \varphi$  は書き下す。

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3} \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \tan^{-1} \sqrt{2} \end{cases}$$

==>  $Q^T = R_2(-\theta) R_3(-\varphi)$  とおく。

==>  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Q^T \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  となる。

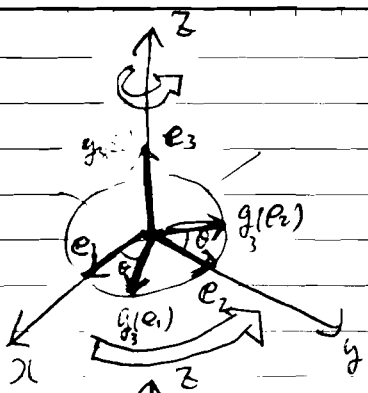
$\Leftrightarrow Q = R_3(\varphi) R_2(\theta)$  とおく。  
 $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって  $R = Q R_3(\alpha) Q^T = R_3(\varphi) R_2(\theta) R_3(\alpha) R_2(-\theta) R_3(-\varphi)$  とおく。

$$\text{特に, } R_3(\varphi) = R_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

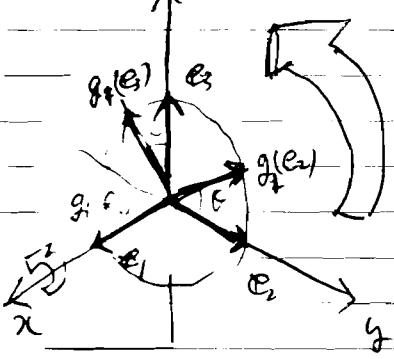
$$R_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3(-\varphi) = R_3\left(-\frac{\pi}{4}\right) = R_3(\varphi)^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad R_2(-\theta) = R_2(\theta)^T = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



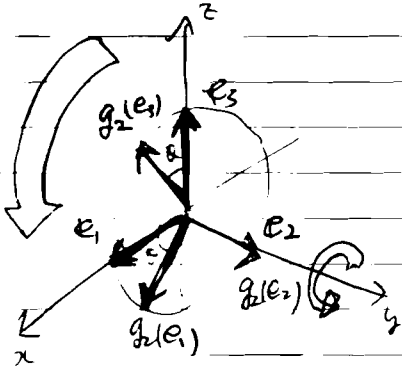
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

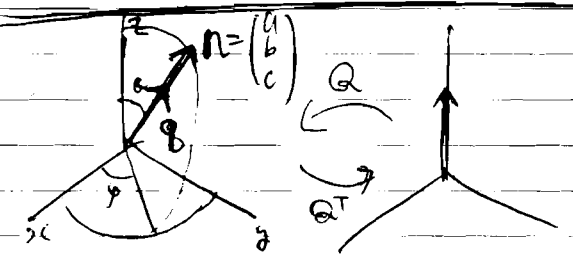


$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{b}{a} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c} \end{cases} \quad \begin{cases} a = r \cos\theta \cos\varphi \\ b = r \sin\theta \cos\varphi \\ c = r \sin\theta \end{cases}$$

$$Q^T = R_2(-\theta) R_3(-\varphi) = R_2(\theta)^T R_3(\varphi)^T$$

$$Q = R_3(\varphi) R_2(\theta)$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}, \quad \cos\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{b}{a}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a^2 + b^2} \end{pmatrix}, \quad R_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} c & 0 & \sqrt{a^2 + b^2} \\ 0 & \sqrt{a^2 + b^2} & 0 \\ -\sqrt{a^2 + b^2} & 0 & c \end{pmatrix}$$

No.

Date.

$$Q = R_3(\varphi)R_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$R = QR_3(\alpha)Q^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha & \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha & -2 \cos \alpha \\ \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha & \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha & -2 \sin \alpha \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \cos \alpha + 2 & -2 \cos \alpha - 2\sqrt{3} \sin \alpha + 2 & -2 \cos \alpha - 2\sqrt{3} \sin \alpha + 2 \\ -2 \cos \alpha + 2\sqrt{3} + 2 & 4 \cos \alpha - 2\sqrt{3} \sin \alpha + 2 & -2 \cos \alpha - 2\sqrt{3} \sin \alpha + 2 \\ -2 \cos \alpha - 2\sqrt{3} \sin \alpha & -2 \cos \alpha + 2\sqrt{3} \sin \alpha & 4 \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ or } \frac{3\pi}{4}$$

$$R = QR_3\left(\frac{\pi}{4}\right)Q^T = \frac{1}{6\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & -2 \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} & -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} & -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$R = QR_3\left(\frac{\pi}{4}\right)Q^T = R_3(\varphi)R_2(\theta)R_3\left(\frac{\pi}{4}\right)R_2(-\theta)R_3(-\varphi)$$

$$Q = R_3(\varphi)R_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{Fr} \begin{pmatrix} ac & -br & +a\tilde{r} \\ bc & ar & +b\tilde{r} \\ -\tilde{r}^2 & 0 & c\tilde{r} \end{pmatrix}$$

注  $\{g_1, g_2, g_3\}$  が  
左系の場合  
回転の向きが  
変わる

注  $\{g_1, g_2, g_3\}$  が  
2次元で右系の  
正規直交基底となるには  
かく  
 $g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$   
とせよ  
 $g_1 \times g_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}} g_3$   
とせよ  
 $g_1 \times (-g_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} g_3$  とせよ  
 $\{g_1, g_2, g_3\}$  が右系となる

§ あるベクトルを軸として回転変換

平面  $W$  の法線ベクトル  $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  を規格化して

$$g_3 = \frac{n}{\|n\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とかく  $\{g_1, g_2, g_3\}$  は

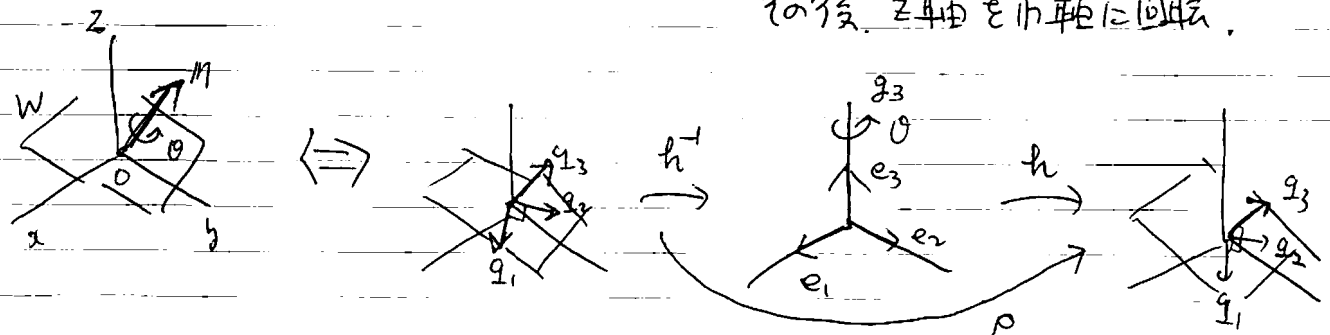
$$(g_i, g_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

とせよ  $\mathbb{R}^3$  の正規直交基底となる

さらに  $g_2 \Rightarrow -g_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  とおきかえれば右系となる

導出 1

$n$  軸を中心に  $\theta$  回転  $\Leftrightarrow$   $n$  軸を  $z$  軸に回転し、  
 $z$  軸を中心に  $\theta$  回転させ、  
その後  $z$  軸を  $n$  軸に回転



$\{e_1, e_2, e_3\} \rightarrow \{g_1, g_2, g_3\}$  に写す変換を  $h$  とかく

$$\begin{cases} h(e_1) = g_1 \\ h(e_2) = g_2 \\ h(e_3) = g_3 \end{cases} \quad \forall y = h(x) = h(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_1 h(e_1) + x_2 h(e_2) + x_3 h(e_3) \\ = (h(e_1) \ h(e_2) \ h(e_3)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (g_1 \ g_2 \ g_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ = Qx$$

と表される。  $h$  の表現行列は

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{+2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & +2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

であるよ、  $n$  軸を中心とする回転変換は

$$y = h(g_3(h^{-1}(x))) = \boxed{h \circ g_3 \circ h^{-1}}(x) = \boxed{Q R_3(\theta) Q^{-1}} x = Bx$$

$$B = Q R_3(\theta) Q^{-1}, \rho = h \circ g_3 \circ h^{-1} = \rho(x)$$

とせよ

## § 直交行列

(注)  $Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & +2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$  は  $Q^T Q = I$  であり、直交行列である。

(2)  $Q Q = I$  を示せ。

### 定理

$Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ ,  $(q_i, q_j) = \delta_{ij}$  は直交行列である。

(1)  $Q^T Q = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{pmatrix} (q_1, q_2, \dots, q_n) = \begin{pmatrix} q_1^T q_1 & q_1^T q_2 & \dots & q_1^T q_n \\ q_2^T q_1 & q_2^T q_2 & \dots & q_2^T q_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^T q_1 & q_n^T q_2 & \dots & q_n^T q_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (q_1, q_1) & (q_1, q_2) & \dots & (q_1, q_n) \\ (q_2, q_1) & (q_2, q_2) & \dots & (q_2, q_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (q_n, q_1) & (q_n, q_2) & \dots & (q_n, q_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = I$

### 定理

$Q^{-1} = Q^T$  (1)  $Q^T Q = I \Rightarrow Q^T Q Q^{-1} = I Q^{-1}$   
 $\Rightarrow Q^T I = Q^{-1} \Rightarrow Q^T = Q^{-1}$

よって、 $Q^{-1} = Q^T$  より  $n$  軸を中心とする  $\frac{\pi}{4}$  回転の回転変換  $\rho: x \rightarrow y$  の表現行列は

$$B = Q R\left(\frac{\pi}{4}\right) Q^{-1} = Q R(0) Q^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & +2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & +2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & +2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 & -2 \\ -\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 & +2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} & -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} & -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

と求まる。



問  $B^T B = I$  を示せ.

定理 直交行列の積は直交行列.

( $\because$ )  $AA^T = I, B^T B = I$  のとき

$$(AB)^T (AB) = B^T A^T A B = B^T I B = B^T B = I. \quad \square$$

### § 座標変換

導出 2

$B$  の導出の別の方法.

標準基底  $\{e_1, e_2, e_3\}$  に対する  $x, y$  の座標を  $(x_1, x_2, x_3)_\Sigma, (y_1, y_2, y_3)_\Sigma$  とする.

また, 基底  $\Sigma' = \{g_1, g_2, g_3\}$  に対する  $x, y$  の座標を

$$(u_1, u_2, u_3)_{\Sigma'}, (v_1, v_2, v_3)_{\Sigma'}$$

と表す. 2 のとき

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = u_1 g_1 + u_2 g_2 + u_3 g_3 \\ &= (g_1 \ g_2 \ g_3) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ &= Q u. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 = v_1 g_1 + v_2 g_2 + v_3 g_3 \\ &= (g_1 \ g_2 \ g_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &= Q v \end{aligned}$$

と表す.  $x = Q u$  を  $(x_1, x_2, x_3)_\Sigma$  と  $(u_1, u_2, u_3)_{\Sigma'}$  との座標変換とよぶ.

$\Sigma'$  の座標系に対する回転の回転は

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

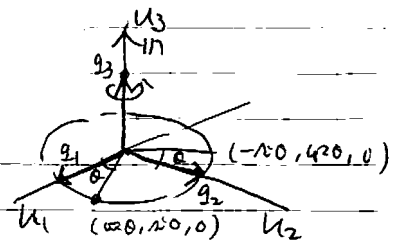
と表す. 7 頁)

$$v = R(\theta) u = g_3(u)$$

加成がある. よって座標変換  $u = Q^T x, v = Q^T y$  となる.

$$Q^T y = R(\theta) Q^T x \Rightarrow y = \underbrace{(Q R(\theta) Q^T)}_B x = B x$$

と得られる.



### § D-11・12, 4, 7 分解

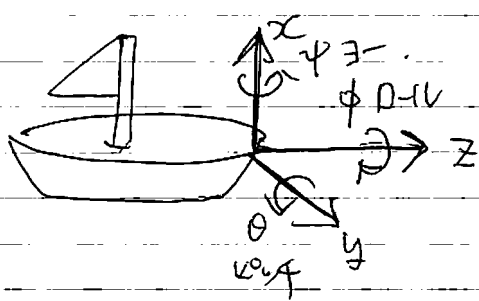
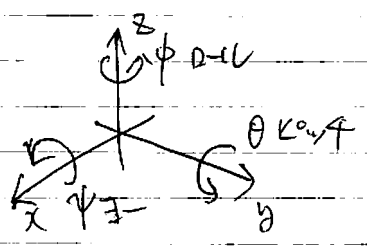
**定理**

任意の回転行列  $R$  は  
 $R = R_1(\psi) R_2(\theta) R_3(\phi)$

と表される. これは D-11・12, 4, 7 分解 と呼ぶ.

$\phi$ : D-11 (roll),  $\theta$ : 12, 4 (pitch),  $\psi$ : 7 (yaw)  
 $(\psi, \theta, \phi)$ : Euler angles

**注** 回転変換は正規直交基底(座標)に正規直交基底(座標)に変換.



**注**

$R_1(\psi)R_2(\theta) \neq R_2(\theta)R_1(\psi)$ ,  $R_2(\theta)R_3(\phi) \neq R_3(\phi)R_2(\theta)$   
 $R_1(\psi)R_3(\phi) \neq R_3(\phi)R_1(\psi)$

**例**

直交行列  $Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & +2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \text{D-11・12, 4, 7 分解}$  也.

(1)

$$Q = R_1(\psi)R_2(\theta)R_3(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi & -\cos\theta \sin\phi & \sin\theta \\ \cos\psi \sin\phi + \sin\psi \sin\theta \cos\phi & \cos\psi \cos\phi - \sin\psi \sin\theta \cos\phi & -\sin\psi \cos\theta \\ \sin\psi \sin\phi - \cos\psi \sin\theta \cos\phi & \sin\psi \cos\phi + \cos\psi \sin\theta \cos\phi & \cos\psi \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1,1)成分, (1,2)成分より

$$\begin{cases} \cos\theta \cos\phi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos\theta \sin\phi = \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan\phi = \frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{6}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi = -\frac{\pi}{6}$$

(2,3)成分, (3,3)成分より

$$\begin{cases} -\sin\psi \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos\psi \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan\psi = -1 \Rightarrow \psi = -\frac{\pi}{4}$$

(1,3)成分, (3,3)成分より

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos\psi \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

よ、 $Q$ の対角角は  $\begin{cases} \phi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ \\ \psi = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 35.3^\circ \end{cases}$  である。

$Q$ は  $Q = R_1\left(-\frac{\pi}{4}\right) R_2(\theta) R_3\left(\frac{\pi}{6}\right)$  と分解される。

(注)  $B = Q R_3\left(\frac{\pi}{4}\right) Q^T$  より

$$\begin{aligned} B &= R_1\left(-\frac{\pi}{4}\right) R_2(\theta) R_3\left(\frac{\pi}{6}\right) R_3\left(\frac{\pi}{4}\right) \left(R_1\left(-\frac{\pi}{4}\right) R_2(\theta) R_3\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^T \\ &= R_1\left(-\frac{\pi}{4}\right) R_2(\theta) R_3\left(\frac{\pi}{6}\right) R_3\left(\frac{\pi}{4}\right) R_3^T\left(\frac{\pi}{6}\right) R_2^T(\theta) R_1^T\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= R_1\left(-\frac{\pi}{4}\right) R_2(\theta) R_3\left(\frac{\pi}{6}\right) R_3\left(\frac{\pi}{4}\right) R_3\left(+\frac{\pi}{6}\right) R_2(-\theta) R_1\left(+\frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad \underbrace{R_3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)}_{R_3\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = R_3\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= R_1\left(-\frac{\pi}{4}\right) R_2(\theta) R_3\left(\frac{\pi}{4}\right) R_2(-\theta) R_1\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

と表される。 $B$ は回転行列の積で表される。

(注) 任意の直交行列は回転行列の積でも表される。  
 $\square = \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square$  分解以外の

**定義**  $f$ : 直交変換  $\stackrel{\text{def}}{\iff} A$ : 直交行列 直交変換

**定理** 正規直交基底  $\xrightarrow{+}$  正規直交基底.  
 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

(\*)  $A, U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ : 直交行列  $\implies V = AU$ : 直交行列

**定理** 直交行列は回転行列と鏡映行列  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  の積で表される。

$f(e_1)$   
 $f(e_2)$   
 $f(e_3)$  左手系

P17  $Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$  は極座標の回転  $Q = R_3(\psi)R_2(\theta)$  で表され?

P18  $Q = R_3(\psi)R_2(\theta)$ ,  $\psi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$  と  $R_1(\psi)R_2(\theta)R_3(\phi)$  だと.

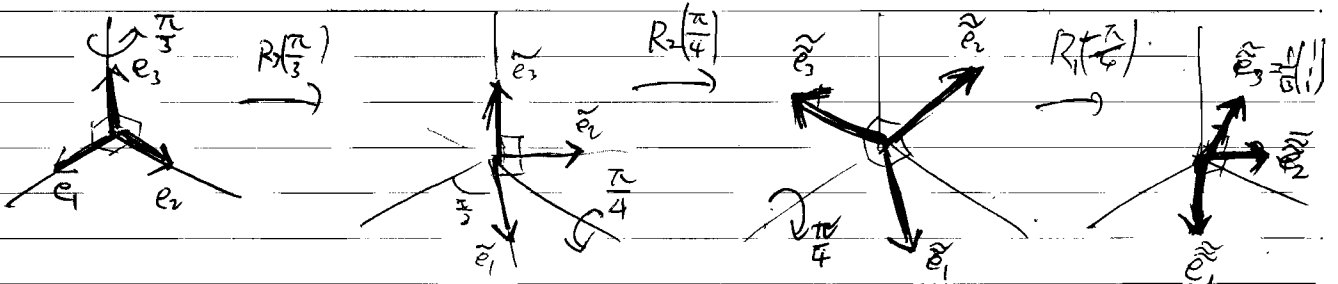
$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = R_1(\psi)R_2(\theta)R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi & -\cos\theta \sin\phi & \sin\theta \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cos\theta \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\cos\theta \sin\phi = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \end{cases} \Rightarrow \tan\phi = \sqrt{3} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} -\sin\psi \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ \cos\psi \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \end{cases} \Rightarrow \tan\psi = -1 \Rightarrow \psi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} \cos\psi \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

∴  $Q = R_1(-\frac{\pi}{4})R_2(\frac{\pi}{4})R_3(\frac{\pi}{3})$

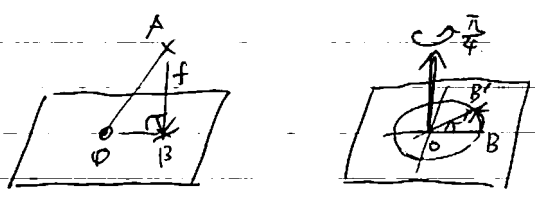


多回変換の例

例) 点  $(1, -1, 2)$   $\xrightarrow{\text{正射影 } f}$   $(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$   $\xrightarrow{\text{回転 } \rho}$   $(\frac{1-3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}, \frac{-5+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}, \frac{4+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}})$

(回転角  $\frac{\pi}{4}$ )

①  $y = \rho(x) = Bx = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} & -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{3}+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{3}+\sqrt{2} & -1+\sqrt{3}+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+3\sqrt{3} \\ -5-\sqrt{3} \\ 4-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$



例) 直線  $x = ta + x_0 \xrightarrow{\text{正射影 } f} m: x = tb + y_0 \xrightarrow{\text{回転 } \rho} m': x = tc + z_0$

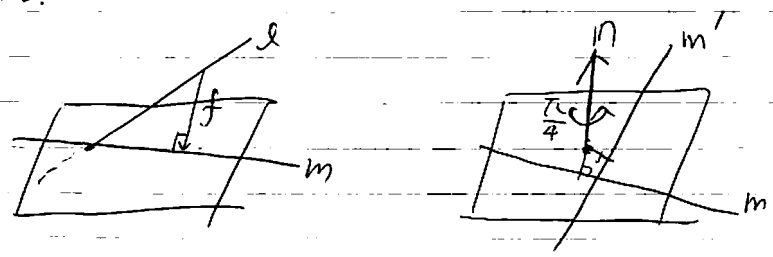
$$\begin{cases} x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \begin{cases} y_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \\ b = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \begin{cases} z_0 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 7+3\sqrt{3} \\ -8+2\sqrt{3} \\ 1-5\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ c = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2+4\sqrt{3} \\ -7-\sqrt{3} \\ 5-3\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{cases}$$

= BC

成分で表すと.

$$m': \frac{3\sqrt{2}x - 7 - 3\sqrt{3}}{2+4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}y + 8 - 2\sqrt{3}}{-7-\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}z - 1 + 5\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$$

と表す.



### 力学系の例

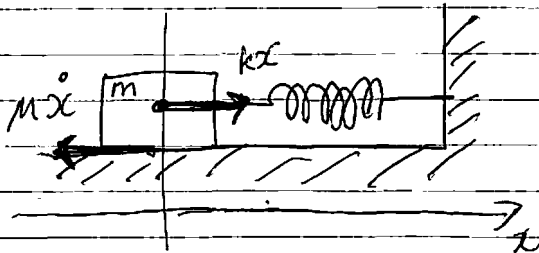
### (線形バネの振動)

例

運動方程式

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = kx - \mu \frac{dx}{dt}$$

$m$ : 質量  
 $k$ : バネ定数  
 $\mu$ : 摩擦係数



速度  $v = \frac{dx}{dt}$  とおくと.

$$m \frac{dv}{dt} = kx - \mu v$$

とあるので、連立すると.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}x - \frac{\mu}{m}v \end{cases}$$

であるので、

$$x = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

とおくと.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表せるから.

$$\frac{d}{dt} x = Ax$$

と書ける. 同次線形自動系の力学系である.

例

(自由落下運動)

運動方程式

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg + \nu \frac{dy}{dt}$$

速度  $v = \frac{dy}{dt}$  とおくと.

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + \nu v$$

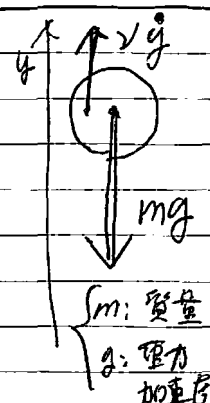
より

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = \frac{\nu}{m}v - g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{\nu}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

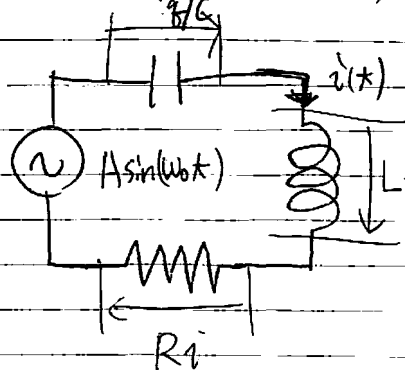
$$\Rightarrow \frac{d}{dt} x = Ax + b$$

と書ける. 非同次線形自動系.



例

(RLC直流通路)



$$\begin{cases} \text{電流 } i(t) = \frac{dq}{dt} \\ C \text{ の電荷 } q(t) \end{cases}$$

キルヒホッフの電圧則.

$$A \sin(\omega t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \left(-\frac{R}{L}\right)i + \left(-\frac{1}{LC}\right)q + \left(\frac{A}{L}\right)\sin(\omega t)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{C} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{A}{L} \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} x = Ax + b(t)$$

非同次線形非自動系

# 力学系への応用

力学系

力学系 (dynamical system)

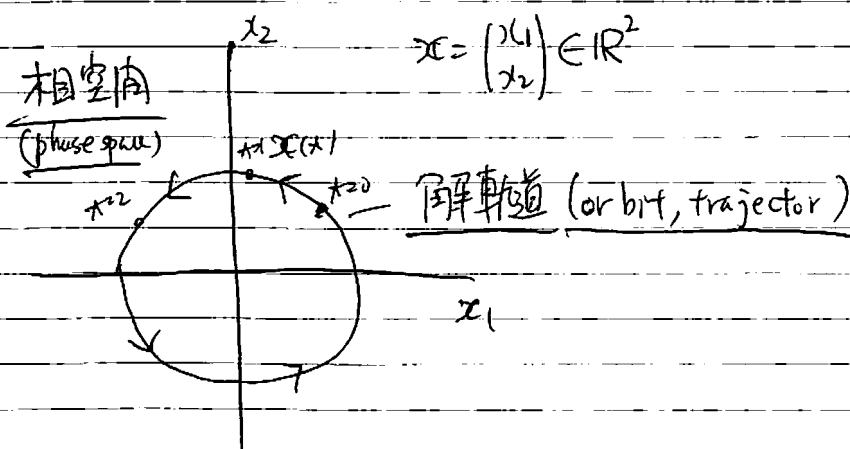
$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t: \text{時間}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$f(t, x)$  ...  $t$  が陽に表れる場合を 非自励系 (nonautonomous) といい

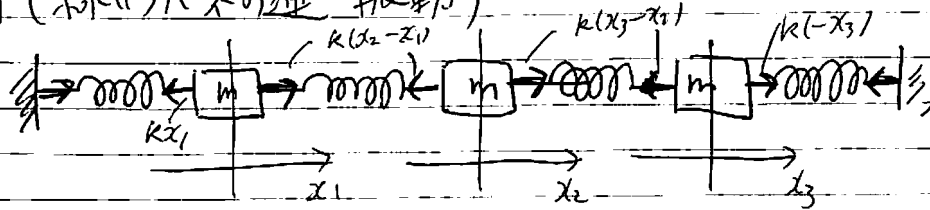
$f(x)$  ...  $t$  が陽に表れない場合を 自励系 (autonomous) といい

$f(x) = Ax + b$  ... 非同次線形 (inhomogeneous)

$f(x) = Ax$  ... 同次線形 (homogeneous)



例1 (線形バネの連振動)



3つの運動方程式

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1) - kx_1 = k(x_2 - 2x_1) \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k(x_3 - x_2) - k(x_2 - x_1) = k(x_3 - 2x_2 + x_1) \\ m \frac{d^2 x_3}{dt^2} = k(-x_3) = k(x_2 - x_3) = k(-2x_3 + x_2) \end{cases}$$

速度  $v_1 = \dot{x}_1$ ,  $v_2 = \dot{x}_2$ ,  $v_3 = \dot{x}_3$  とおく

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{同次線形微分}$$



## § 行列, ベクトルの微分

**定義**  $\frac{d}{dx} A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{da_{11}}{dx} & \frac{da_{12}}{dx} & \dots & \frac{da_{1n}}{dx} \\ \frac{da_{21}}{dx} & - & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{da_{m1}}{dx} & \dots & \dots & \frac{da_{mn}}{dx} \end{pmatrix}$  特  $n \times n$  型のとき  $\frac{d}{dx} x = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dx} \\ \frac{dx_2}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dx} \end{pmatrix}$

**定理**  $\frac{d}{dx} (AB) = \frac{dA}{dx} B + A \frac{dB}{dx}$

(1)  $AB = C = (c_{ij}), c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$  by

$$\frac{dc_{ij}}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_k a_{ik} b_{kj} = \sum_k \dot{a}_{ik} b_{kj} + a_{ik} \dot{b}_{kj} \quad \square$$

**定理**  $\frac{d}{dx} (A^{-1}) = -A^{-1} \frac{dA}{dx} A^{-1}$

(2)  $I = A^{-1}A$  の両辺微分すると.

$$0 = \frac{dA^{-1}}{dx} A + A^{-1} \frac{dA}{dx} \Rightarrow \frac{dA^{-1}}{dx} A = -A^{-1} \frac{dA}{dx} \Rightarrow \frac{dA^{-1}}{dx} = -A^{-1} \frac{dA}{dx} A^{-1} \quad \square$$

**例**  $y = Ax \Rightarrow \dot{y} = \dot{A}x + A\dot{x}$

## § 同次線形微分系の一般解

力学系  $\frac{dx}{dt} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$n=1$  のとき  $x=(x)$ ,  $A=(a) \geq a < 0$ .

$$\frac{dx}{dt} = ax.$$

この一般解は

$$x(t) = e^{at} x(0)$$

と得られる。よって一般の  $n$  のとき

$$x(t) = B(t)x(0), \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

と一般解を仮定する。これを  $\dot{x} = Ax$  に代入すると

$$\text{(左辺)} = \frac{d}{dt}(B(t)x(0)) = \frac{dB(t)}{dt}x(0) + B(t)\frac{dx(0)}{dt} = \frac{dB(t)}{dt}x(0) = \dot{B}x(0)$$

$$\text{(右辺)} = Ax = ABx(0)$$

$$\Rightarrow \dot{B}x(0) = ABx(0) \Rightarrow \dot{B} = AB$$

となる。  $\dot{B} = AB$  をみたす  $B$  がみつければ解が得られる。

そこで

$$B(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

と置く。このとき

$$\dot{B} = \frac{d}{dt} \left( I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \dots \right) = 0 + 1A + \frac{2}{2}tA^2 + \frac{3}{3!}t^2A^3 + \frac{4}{4!}t^3A^4 + \dots$$

$$= A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \frac{t^3}{3!}A^4 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \dots + \frac{t^n}{n!}A^{n+1} + \dots$$

$$= A \left( I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1} + \dots \right)$$

$$= A \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) = AB$$

が成り立つ。よって、この  $B$  は  $\dot{B} = AB$  をみたす  $B \in$

$$B(t) = e^{tA}$$

と置く。  $\square$

No. \_\_\_\_\_

Date. \_\_\_\_\_

一般解は

$$x(t) = e^{tA} x(0)$$

と表される。

非同次の場合は定数変化法を用いて解く

$$\dot{x} = Ax + b$$

$$x(t) = e^{tA} C(t)$$

と仮定する。  $\dot{x} = Ax + b$  が入り方と。

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} (e^{tA} C) = \frac{de^{tA}}{dt} C + e^{tA} \frac{dC}{dt} = A e^{tA} C + e^{tA} \dot{C} = Ax + e^{tA} \dot{C} = Ax + b$$

$$\Rightarrow e^{tA} \dot{C} = b \Rightarrow \dot{C} = (e^{tA})^{-1} b = e^{-tA} b$$

$$\Rightarrow \dot{C} = e^{-tA} b \Rightarrow C(t) = \int e^{-tA} b dt$$

よって、 $\Rightarrow$

$$x(t) = e^{tA} C(t), \quad C(t) = \int e^{-tA} b dt$$

と表れる。

## 固有値分解

固有方程式  $Ax = \lambda x, x \neq 0$   
(eigen-equation)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda: \text{固有値 (eigenvalue)} \\ x: \lambda \text{ に属する固有ベクトル (eigen-vector)} \end{array} \right.$$

固有空間  $W(\lambda) = \{x \mid Ax = \lambda x\}$   
(eigen-space)

固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  とその固有ベクトル  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^n$

$$\left\{ \begin{array}{l} A p_1 = \lambda_1 p_1 \\ A p_2 = \lambda_2 p_2 \\ \vdots \\ A p_n = \lambda_n p_n \end{array} \right. \Rightarrow (A p_1 \mid A p_2 \mid \dots \mid A p_n) = (\lambda_1 p_1 \mid \lambda_2 p_2 \mid \dots \mid \lambda_n p_n)$$

$$\Rightarrow A \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

$$\Rightarrow AP = PD$$

が成立する。Pが正則 (regular) のとき ( $\{p_1, \dots, p_n\}$  が基底となる)

$$\Rightarrow P^{-1}AP = P^{-1}PD \Rightarrow D = P^{-1}AP$$

と書ける。AはDへの変換

$$D = P^{-1}AP$$

を対角化と云う。AはDをPで変換して

$$A = PDP^{-1}$$

を 固有値分解 (eigen decomposition) と云う。  
Aの

**定理** Aが対角化可能ならば  $A^k = P D^k P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$

$$\textcircled{1} A^k = \underbrace{(PDP^{-1})}_{I} \underbrace{(PDP^{-1})}_{I} \cdots \underbrace{(PDP^{-1})}_{I} = \underbrace{PDP^{-1}}_k = P D^k P^{-1} \quad \textcircled{2}$$

### § 一般解の固有値分解

力学系  $\dot{x} = Ax$  の一般解は  $x(t) = e^{tA} x(0)$  である。

これを固有値分解  $A = PDP^{-1}$  を代入すると

$$e^{tA} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} A^h = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} P D^h P^{-1} = P \left( \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} D^h \right) P^{-1} = P e^{tD} P^{-1}$$

と書ける。また、

$$e^{tD} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} D^h = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} \begin{pmatrix} \lambda_1^h & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_1)^h}{h!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_n)^h}{h!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

とも書ける。よって、一般解は  $A$  が対角化可能ならば、

$$x(t) = P e^{tD} P^{-1} x(0) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1} x(0), \quad P = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$$

と表される。さらに書きかえて

$$\underbrace{P^{-1} x(t)}_{y(t)} = e^{tD} \underbrace{P^{-1} x(0)}_{y(0)} \Rightarrow y(t) = e^{tD} y(0)$$

となる。  $y = P^{-1}x$  は

$$x = P y \Rightarrow x = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

↑ 座標
↑ 基底
↑ 基底

$$\Rightarrow y_1 p_1 + y_2 p_2 + \dots + y_n p_n$$

↑ 座標
↑ 基底

と表されるので、 $x(t) = y$  は標準基底  $\Sigma = \{e_1, \dots, e_n\}$  の座標  $(x_1, \dots, x_n)_{\Sigma}$  による基底  $\Sigma' = \{p_1, \dots, p_n\}$  の座標  $(y_1, \dots, y_n)_{\Sigma'}$  への座標変換とみなす。

基底  $\Sigma'$  における座標系では、力学系は  $y(t) = e^{tD} y(0)$  より

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1(0) \\ y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_2(0) \\ \vdots \\ y_n(t) = e^{\lambda_n t} y_n(0) \end{cases}$$

と書ける。これを、解軌道を描き、座標変換  $x = Py$  での  $(x_1, \dots, x_n)_{\Sigma}$  の解軌道に

変換すればよい。

# 実固有値の場合

例1

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0, \quad x = x(t)$$

$\dot{x} = v$  とおくと.

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = 3v - 2x \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{x} = Ax$$

と書ける.  $A$  の固有値, 固有ベクトル, 固有空間を求めよう.

$$\begin{aligned} 0 &= |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3 - \lambda) + 2 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \Rightarrow \lambda = 1, 2 \end{aligned}$$

固有値は  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$  である. それぞれ固有方程式  $Ax = \lambda_1 x, Ax = \lambda_2 x$  を解く.

$\lambda = \lambda_1 = 1$  のとき

$$Ax = \lambda x \Rightarrow (A - I)x = 0 \quad A - I = \begin{pmatrix} 0 - 1 & 1 \\ -2 & 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - I \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 故に } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x - v = 0 \Rightarrow x = v.$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c p_1 \quad (\forall c \in \mathbb{R})$$

$$\text{固有空間は } W(\lambda_1) = W(1) = \langle p_1 \rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$\lambda = \lambda_2 = 2$  のとき

$$Ax = \lambda x \Rightarrow (A - 2I)x = 0 \text{ を解く.}$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 - 2 & 1 \\ -2 & 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 故に } x - \frac{v}{2} = 0 \Rightarrow v = 2x$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c p_2 \quad (\forall c \in \mathbb{R})$$

$$\text{固有空間は } W(\lambda_2) = W(2) = \langle p_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

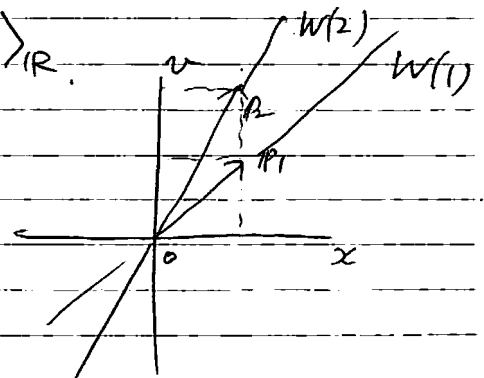
$$P = (p_1, p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ とおくと.}$$

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \text{ 故に } P \text{ は正則行列である.}$$

$A$  は対角化可能である. したがって,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

と書ける.



力学系  $\dot{x} = Ax$  の一般解  $x = e^{tA} x(0)$  (≠)

$$x = e^{tA} x(0) = e^{tP^{-1}DP} x(0) = P e^{tD} P^{-1} x(0) \Rightarrow P^{-1} x(t) = e^{tD} P^{-1} x(0)$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{tD} y(0)$$

と書ける.  $y = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$  とおくと.

同様,  $x = P y$

$$y(t) = e^{tD} y(0) \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_0 \\ \tilde{v} = e^{\lambda_2 t} \tilde{v}_0 \end{cases}$$

と表せる.  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \neq 1$

$$\begin{cases} \tilde{x} = e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_0 \\ \tilde{v} = e^{\lambda_2 t} \tilde{v}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}^2 = e^{2\lambda_1 t} \tilde{x}_0^2 \\ \tilde{v} = e^{\lambda_2 t} \tilde{v}_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\tilde{v}}{\tilde{x}^2} = \frac{\tilde{v}_0}{\tilde{x}_0^2} \Rightarrow \tilde{v} = \left( \frac{\tilde{v}_0}{\tilde{x}_0^2} \right) \tilde{x}^2$$

となる. 座標変換

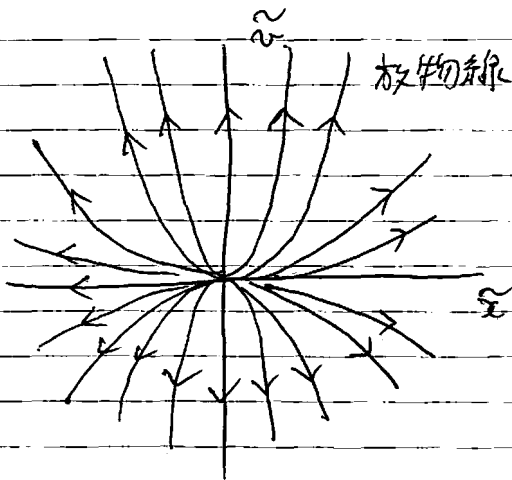
放物線

$$y = P^{-1} x \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - v \\ v - x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = 2x - v \\ \tilde{v} = v - x \end{cases}$$

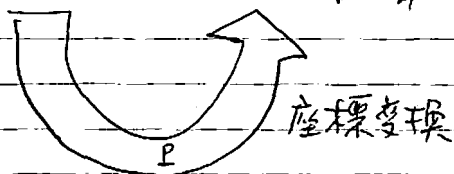
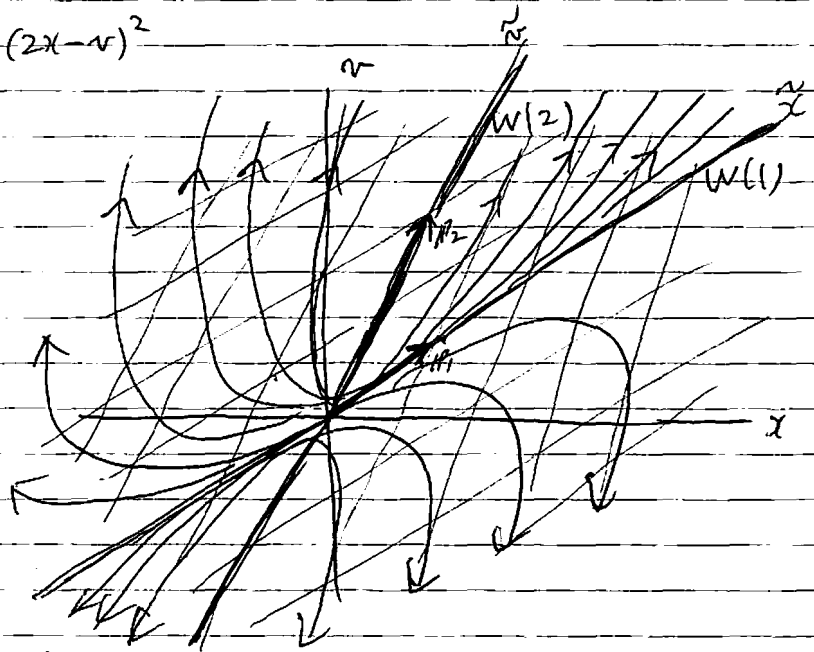
より, 解軌道は

$$(v - x) = \frac{v_0 - x_0}{(2x_0 - v_0)^2} (2x - v)^2$$

となる



放物線



### § 複素固有値の場合

例

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0.$$

速度  $v = \dot{x}$  とおく.

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -5x - 2v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -5x - 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} X = AX.$$

Aの固有値は

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -5 & -2 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(-2-\lambda) + 5 = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \pm 2i.$$

と求まる.

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 + 2i \\ \lambda_2 = -1 - 2i \end{cases}$$

とおく.  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$  であることに注意する.

$\lambda_1$ の固有ベクトルは  $AX = \lambda_1 X$  より

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 - \lambda_1 & 1 \\ -5 & -2 - \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2i & 1 \\ -5 & -1 - 2i \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 + 2i \\ 5 & 1 + 2i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 + 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 5x + (1 + 2i)v = 0 \Rightarrow x = -\frac{1 + 2i}{5}v$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1 + 2i}{5}c \\ c \end{pmatrix} = \frac{c}{5} \begin{pmatrix} -1 - 2i \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{c}{5} P_1.$$

同様

$$AP_1 = \lambda_1 P_1 \Rightarrow \overline{AP_1} = \overline{\lambda_1 P_1}$$

$$\Rightarrow \overline{A} \overline{P_1} = \overline{\lambda_1} \overline{P_1} \Rightarrow A \overline{P_1} = \lambda_2 \overline{P_1}$$

よ,  $\lambda_2$ の固有ベクトルは  $P_2 = \overline{P_1}$  である.

よ, Aは

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2i & 0 \\ 0 & -1 - 2i \end{pmatrix} = P^{-1} A P$$

$$P = (P_1, \overline{P_1}) = \begin{pmatrix} 1 + 2i & 1 - 2i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

と対角化可能である.

$\dot{x} = AX$ の一般解は

$$x(t) = e^{tA} x(0) = e^{t P D P^{-1}} x(0) = P e^{tD} P^{-1} x(0).$$

と表される.  $\lambda_1 = \alpha + i\omega, \lambda_2 = \alpha - i\omega$  とおくと,

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} e^{-i\omega t} \end{pmatrix}$$

$$= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \alpha = \text{Re}(\lambda_1) = \frac{\lambda_1 + \bar{\lambda}_1}{2} \\ \omega = \text{Im}(\lambda_1) = \frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_1}{2i} \end{cases}$$

$$= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

と表される. さらに,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2i} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta + i \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta - i \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S R(\theta) S^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

と書ける.



5.7.

$$x(t) = e^{\alpha t} P S R(\omega t) S^{-1} P^{-1} x(0) = e^{\alpha t} (P S) R(\omega t) (P S)^{-1} x(0)$$

とすると.

$$P S = (P_1 \ P_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P_1 - P_2}{2i} & \frac{P_1 + P_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Im}(P_1) & \text{Re}(P_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & r_1 \end{pmatrix} = Q$$

とすると.

$$x(t) = e^{\alpha t} Q R(\omega t) Q^{-1} x(0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{Q^{-1} x(t)}_{y(t)} = e^{\alpha t} R(\omega t) \underbrace{Q^{-1} x(0)}_{y(0)}$$

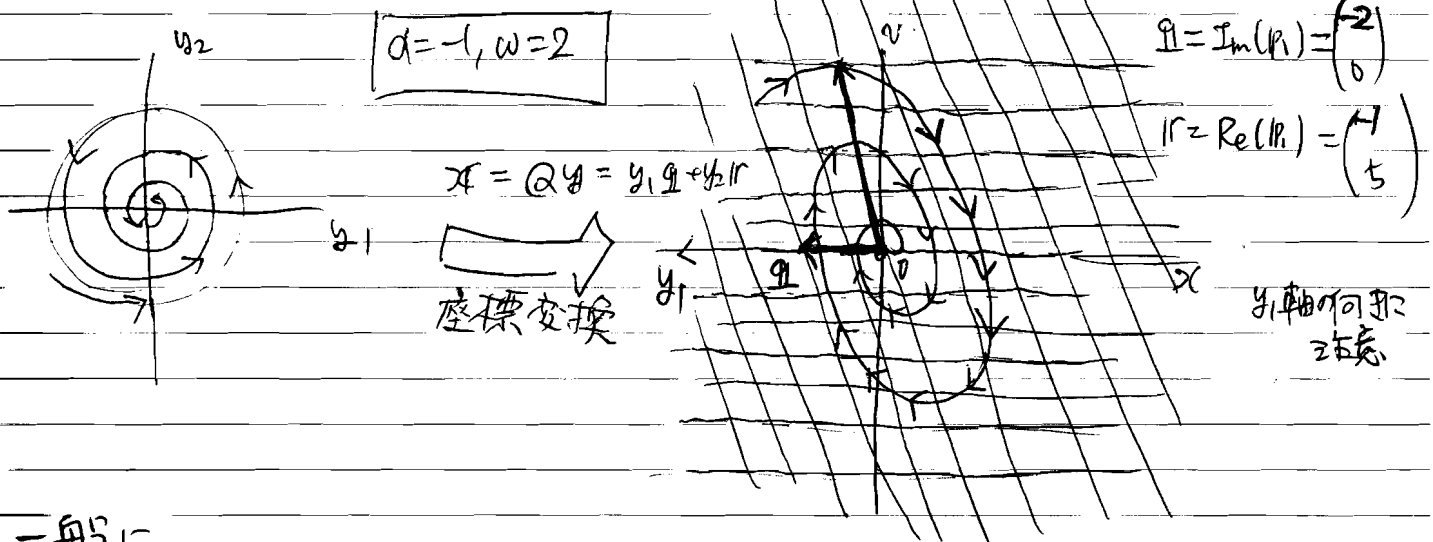
$$\Rightarrow y(t) = e^{\alpha t} R(\omega t) y(0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = e^{\alpha t} (y_{10} \cos \omega t + y_{20} \sin \omega t) \\ y_2(t) = e^{\alpha t} (y_1(0) \sin \omega t + y_2(0) \cos \omega t) \end{cases}$$

注  $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = x + iy$

$z$  の実部  $\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{(x+iy) + (x-iy)}{2} = x$

$z$  の虚部  $\text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{(x+iy) - (x-iy)}{2i} = y$

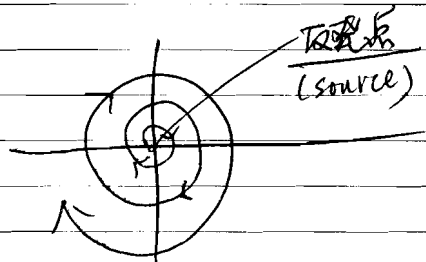
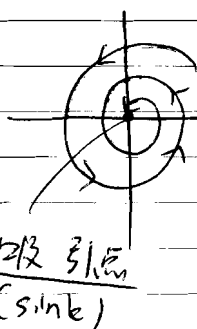
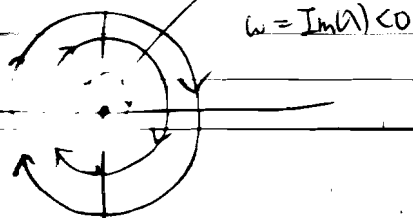
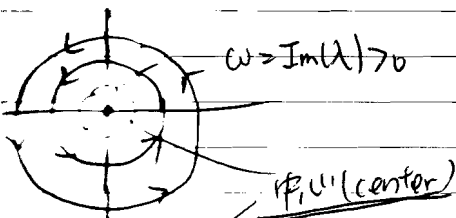


一般に.

$$\alpha = \text{Re}(\lambda) = 0$$

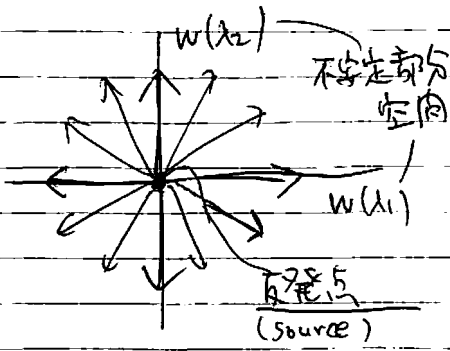
$$\alpha = \text{Re}(\lambda) < 0$$

$$\alpha = \text{Re}(\lambda) > 0$$

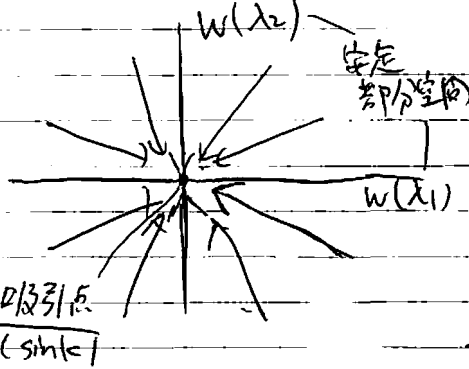


一般に

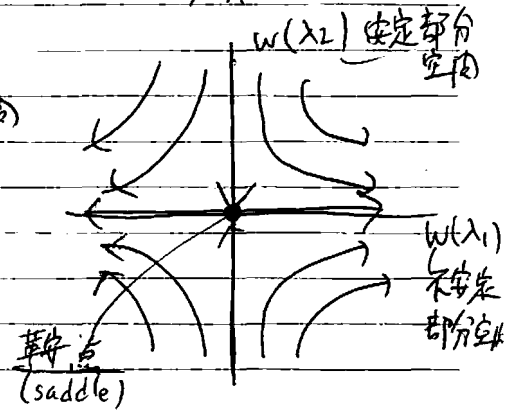
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$



$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$



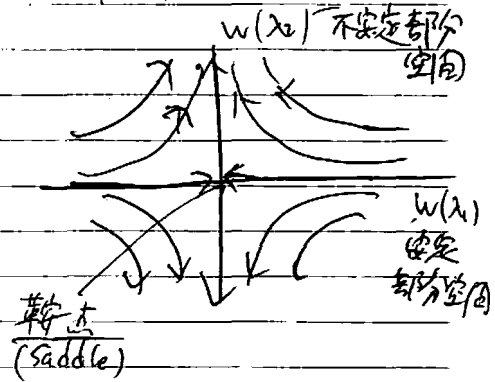
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$



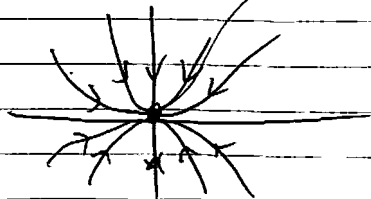
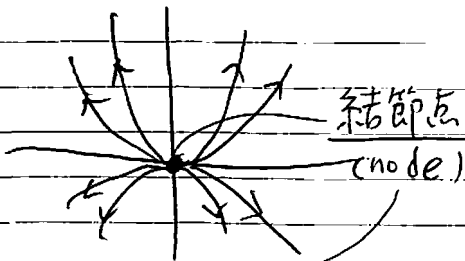
$\lambda > 0$  のとき  $w(\lambda)$ : 不安定部分空間 (unstable subspace)

$\lambda < 0$  のとき  $w(\lambda)$ : 安定部分空間 (stable subspace)

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$



特に  $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$



## § 平衡点

固有空間 (eigen-space)  $W(\lambda) = \{x \mid Ax = \lambda x\}$

$\text{Re}(\lambda) < 0$  のとき 安定部分空間 (stable subspace)  $W_s(\lambda)$

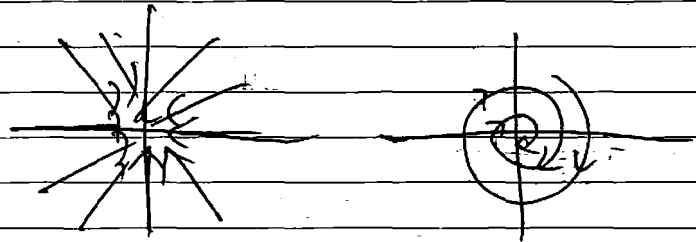
$\text{Re}(\lambda) > 0$  のとき 不安定部分空間 (unstable subspace)  $W_u(\lambda)$

$\text{Re}(\lambda) = 0$  のとき 中心部分空間 (center subspace)  $W_c(\lambda)$

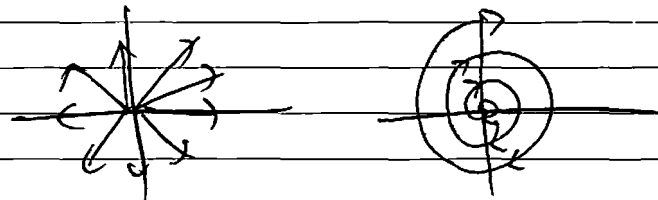
平衡点 (equilibria)  $\frac{dx^*}{dt} = 0$  の点  $\Leftrightarrow Ax^* = 0$  の点

$$\Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \{x \mid Ax = 0\} \ni x^*$$

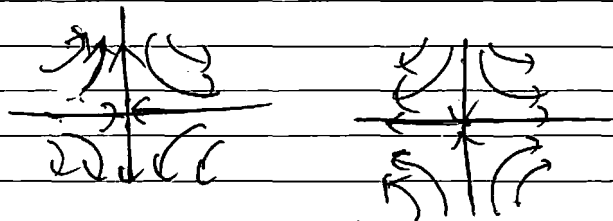
(i)  $x^* \in W_s(\lambda_1), x^* \in W_s(\lambda_2), \dots$  全て安定部分空間に含まれるとき  
 $x^*$  は 吸引点 (sink)



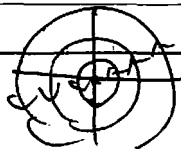
(ii)  $x^* \in W_u(\lambda_1), x^* \in W_u(\lambda_2), \dots$  全て不安定部分空間に含まれるとき  
 $x^*$  は 反発点 (source)



(iii)  $x^* \in W_s(\lambda_1), x^* \in W_u(\lambda_2), \dots$  安定と不安定部分空間に含まれるとき  
 $x^*$  は 鞍点 (saddle)



(iv)  $x^* \in W_c(\lambda_1), \dots$  中心部分空間に含まれるとき  
 $x^*$  は 中心 (center)



### § 重複固有値の場合

(174)

$$\dot{x} - 2x + x = 0$$

$v = \dot{x}$  とおくと

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} x = Ax$$

と書ける。Aの固有値は

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(2 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

すなわち  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$  (2重)

とある。  $\lambda = 1$  の固有ベクトルは

$$Ax = x \neq 0$$

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 0 - 1 & 1 \\ -1 & 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

簡約化  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

とあるから、  $x - v = 0 \Rightarrow x = v$

よって

$$x = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c p_1$$

とある。  $\lambda = 1$  の固有ベクトルは

$$W(1) = \langle p_1 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$$

よって 1次元とある。

Aは対角化できない。

Aはジョルダン分解がある。

### § ジョルダン分解

一般固有空間 E

$$W_m = \{ x \mid (A - \lambda I)^m x = 0 \}$$

とおく。すると

$$(A - \lambda I) p_1 = 0 \Rightarrow p_1 \in W_1(\lambda)$$

とある。また

$$(A - \lambda I)x = p_1$$

Eを解く。

$$(A - \lambda I)x = p_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 - 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を簡約化して

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

とある。よって  $x - v = 1$  とある。

$$x = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = p_2 + c p_1$$

Eを解く。  $p_2$  は

$$(A - \lambda I)p_2 \neq 0 \Rightarrow p_2 \notin W_1(\lambda)$$

$$(A - \lambda I)^2 p_2 = (A - \lambda I)(A - \lambda I)p_2$$

$$= (A - \lambda I)p_1$$

$$= 0 \Rightarrow p_2 \notin W_2(\lambda)$$

Eを解く。  $E_2$  は

$$\begin{cases} A p_1 = \lambda p_1 \\ A p_2 = \lambda p_2 + p_1 \end{cases} \begin{cases} p_1 \in W_1(\lambda) \\ p_2 \notin W_1(\lambda), p_2 \in W_2(\lambda) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A p_1 \ A p_2) = (\lambda p_1 \ \lambda p_2 + p_1)$$

$$\Rightarrow A \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ \parallel & \parallel \\ & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ \parallel & \parallel \\ & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow AP = PJ$ . 対角化できる。

$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$  故

P は正則行列

$A = PJP^{-1}$

加減して、2列を消すのが解

J は対角行列

(com)

一般に消すのが

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \left. \vphantom{J} \right\} m$$

$J = D + N$   
 $= \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$   
 $J^k = (D+N)^k$   
 $= D^k + kND + \dots$   
 $= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} N^r D^{k-r}$

$\lambda$  は A の m 重固有値  
 一般固有空間

$W_m(\lambda) = \{x \mid (A - \lambda I)^m x = 0\}$

$$\begin{cases} A p_1 = \lambda p_1 \\ A p_2 = \lambda p_2 + p_1 \\ A p_3 = \lambda p_3 + p_2 \\ \vdots \\ A p_m = \lambda p_m + p_{m-1} \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} p_1 \in W_1(\lambda) \\ p_2 \notin W_1(\lambda), p_2 \in W_2(\lambda) \\ p_3 \notin W_1(\lambda), p_3 \notin W_2(\lambda), p_3 \in W_3(\lambda) \\ \dots \\ p_m \notin W_1(\lambda), p_m \notin W_2(\lambda), \dots \\ \dots, p_m \notin W_{m-1}(\lambda), p_m \in W_m(\lambda) \end{cases}$

は

(a) 示す

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & \dots & \binom{k}{r}\lambda^{k-r} & \dots \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dots & \dots & \dots \\ & & \lambda^k & \dots & \dots & \dots \\ & & & \lambda^k & \dots & \dots \\ & & & & \dots & \dots \\ & & & & & k\lambda^{k-1} \\ & & & & & \lambda^k \end{pmatrix}$$

$J^0 = I$   
 $J^1 = J$   
 $J^r = J^r$   
 $r=1, 2, \dots$

$(A p_1 \ A p_2 \ \dots \ A p_m) =$   
 $(\lambda p_1 \ \lambda p_2 + p_1 \ \dots \ \lambda p_m + p_{m-1})$

$\Rightarrow A(p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m) =$   
 $(p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m) \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$

$\Rightarrow AP = PJ$

$\Rightarrow A = PJP^{-1}$

$\Rightarrow J = P^{-1}AP$  : 対角標準形 (Jordan canonical form)

加減して、2列を消すのが

$\dot{x} = Ax$  の一般解は

$x = e^{tA} x(0) = e^{tPJP^{-1}} x(0)$   
 $= P e^{tJ} P^{-1} x(0)$

と書ける。  $\Rightarrow e^{tJ}$  は

$e^{tJ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} J^n = \begin{pmatrix} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^h}{h!} & \sum_{h=0}^{\infty} \frac{n \cdot t^n \lambda^{n-1}}{n!} & \dots \\ & \text{①} & \text{②} \\ & & \dots \end{pmatrix}$

$t e^{tJ} = \begin{pmatrix} t e^{t\lambda} & \frac{t^2}{2} e^{t\lambda} & \dots \\ \text{①} & \text{②} & \text{③} \\ & & \dots \end{pmatrix}$

②  $= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{n t^n \lambda^{n-1}}{n!} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{t (t\lambda)^{h-1}}{(h-1)!}$   
 $= t \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(t\lambda)^{h-1}}{(h-1)!} = t \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^h}{h!} = t e^{t\lambda}$

③  $= \sum_{h=2}^{\infty} \frac{\binom{h}{2} t^h \lambda^{h-2}}{h!} = \sum_{h=2}^{\infty} \frac{h!}{2!(h-2)! 2!} t^h \lambda^{h-2} = \frac{t^2}{2} \sum_{h=2}^{\infty} \frac{(t\lambda)^{h-2}}{(h-2)!}$   
 $= \frac{t^2}{2} e^{t\lambda}$



## § 離散力学系

$$\text{前進差分 (右行-差分)} \quad \frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

$$\text{後退差分} \quad \frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t-h)}{h}$$

$$\text{中心差分 (中心差分)} \quad \frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t+h) - x(t-h)}{h}$$

差分近似

例

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = kx \quad \left( \mu \frac{dx}{dt} \text{ は } 0 \text{ とおける} \right) \quad \nu = \frac{dx}{dt} \text{ とおける.}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt} X = AX : \text{力学系}$$

$\Rightarrow$   $\frac{dx}{dt}$  を差分近似する.

(i) 前進差分

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = AX(t) \Rightarrow x(t+h) = x(t) + hAX(t) = (\underbrace{I + hA}_{\tilde{A}}) x(t)$$

$$\Rightarrow x(t+h) = \tilde{A} x(t)$$

$$\Rightarrow \text{ } t = nh \text{ とおく. } 2 \text{ のとき } \left. \begin{array}{l} x(t) = x(nh) = x^{(n)} \\ x(t+h) = x((n+1)h) = x^{(n+1)} \end{array} \right\} \text{ とおく.}$$

$$\Rightarrow x^{(n+1)} = \tilde{A} x^{(n)} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^{(n+1)} \\ v^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ \frac{hk}{m} & 1 - \frac{hk}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ v^{(n)} \end{pmatrix}$$

(ii) 後退差分

$$\frac{x(t) - x(t-h)}{h} = AX(t) \Rightarrow \frac{x^{(n)} - x^{(n-1)}}{h} = AX^{(n)}$$

$$\Rightarrow x^{(n)} = x^{(n-1)} + hAX^{(n)} \Rightarrow x^{(n)} - hAX^{(n)} = x^{(n-1)}$$

$$\Rightarrow (I - hA)x^{(n)} = x^{(n-1)} \Rightarrow x^{(n)} = (I - hA)^{-1} x^{(n-1)}$$

$$\Rightarrow x^{(n+1)} = \underbrace{\left( I - hA \right)^{-1}}_{\tilde{A}} x^{(n)} \Rightarrow x^{(n+1)} = \tilde{A} x^{(n)}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ -\frac{hk}{m} & 1 + \frac{hk}{m} \end{pmatrix}^{-1}$$

(iii) 中心差分

$$\frac{x(x+h) - x(x-h)}{2h} = Ax(x) \Rightarrow \frac{x^{(n+1)} - x^{(n-1)}}{2h} = Ax^{(n)}$$

$$\Rightarrow x^{(n+1)} = 2hAx^{(n)} + x^{(n-1)} \Rightarrow \begin{cases} x^{(n+1)} = 2hAx^{(n)} + x^{(n-1)} \\ x^{(n)} = x^{(n)} + 0 \cdot x^{(n-1)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x^{(n+1)} \\ x^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2hA & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x^{(n+1)} \\ v^{(n)} \\ x^{(n)} \\ v^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2h & 1 & 0 \\ \frac{2hk}{m} & -\frac{2hk}{m} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ v^{(n)} \\ x^{(n-1)} \\ v^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}^{(n+1)} = \tilde{A} \tilde{x}^{(n)}$$

注  $\frac{dx}{dt} = Ax$  と  $x^{(n+1)} = \tilde{A} x^{(n)}$  は異なる解法。時間刻幅  $h = \Delta t$ 。解の精度は  $h$  が小さいほど高くなる。

一般に

$x^{(n+1)} = Ax^{(n)}$  : 離散力学系 (discrete dynamical system)

- $n \in \mathbb{Z}$  ... 離散時間
- $x \in \mathbb{R}^N$  ... 空間
- $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$



# 離散力学系の一般解

$x^{(n+1)} = Ax^{(n)}$  の一般解は  $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$  である。

(1)  $x^{(1)} = Ax^{(0)}, x^{(2)} = Ax^{(1)} = A^2x^{(0)}, \dots$  (2)

A が固有値分解  $A = PDP^{-1}$  ならば

“ジョルダン”分解  $A = PJP^{-1}$  で表れるとある。

よって

$x^{(n)} = PDP^{-1}x^{(0)} \Leftrightarrow y^{(n)} = D^n y^{(0)},$  座標変換  $x^{(n)} = Py^{(n)}$

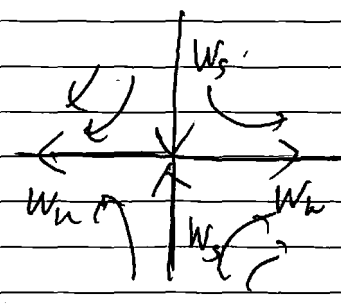
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1^{(n)} = \lambda_1^n y_1^{(0)} \\ y_2^{(n)} = \lambda_2^n y_2^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(n)} = \lambda_n^n y_n^{(0)} \end{cases} \begin{cases} \leftarrow \text{等ECの } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ の} \\ \leftarrow \text{等EC数列} \end{cases}$$

各成分は  $|\lambda| < 1$  のとき収束し,  $|\lambda| > 1$  のとき発散する。

$|\lambda| < 1$  のとき  $W_s(\lambda)$  : 安定部分空間

$|\lambda| > 1$  のとき  $W_u(\lambda)$  : 不安定部分空間

$|\lambda| = 1$  のとき  $W_c(\lambda)$  : 中心部分空間



例1

差分方程式

$$x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = 0, \quad \text{--- (1)}$$

の一般解を求める。まず,  $n=0, 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} x_1(n) = x(n) \\ x_2(n) = x(n+1) = x_1(n) \end{cases}$$

とおくと (1) は

$$x_2(n+1) = 5x_2(n) - 6x_1(n)$$

と表すので, (1) は

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}$$

と書ける。ベクトルで表すと, 離散力学系

$$\textcircled{2} \quad x(n+1) = A x(n), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

を得る。②の一般解は

$$x(n) = A^n x(0)$$

である。Aを固有値分解すると,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3.$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x_1 - x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c p_1$$

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x_1 - x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x = c \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = c p_2$$

$$\begin{cases} D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ P = (c p_1 \ c p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$A = P D P^{-1}$$

である。

一般解は

$$x(n) = A^n x(0) = P D^n P^{-1} x(0)$$

と表す。座標変換すると,

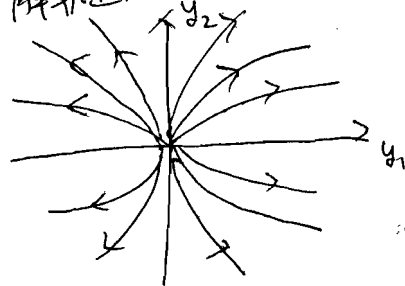
$$P^{-1} x(n) = D^n P^{-1} x(0)$$

$$y(n) = D^n y(0), \quad y(n) = P^{-1} x(n)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1(n) = \lambda_1^n y_1(0) = 2^n y_1(0) \\ y_2(n) = \lambda_2^n y_2(0) = 3^n y_2(0) \end{cases}$$

を得る。解軌道は,



である。座標変換

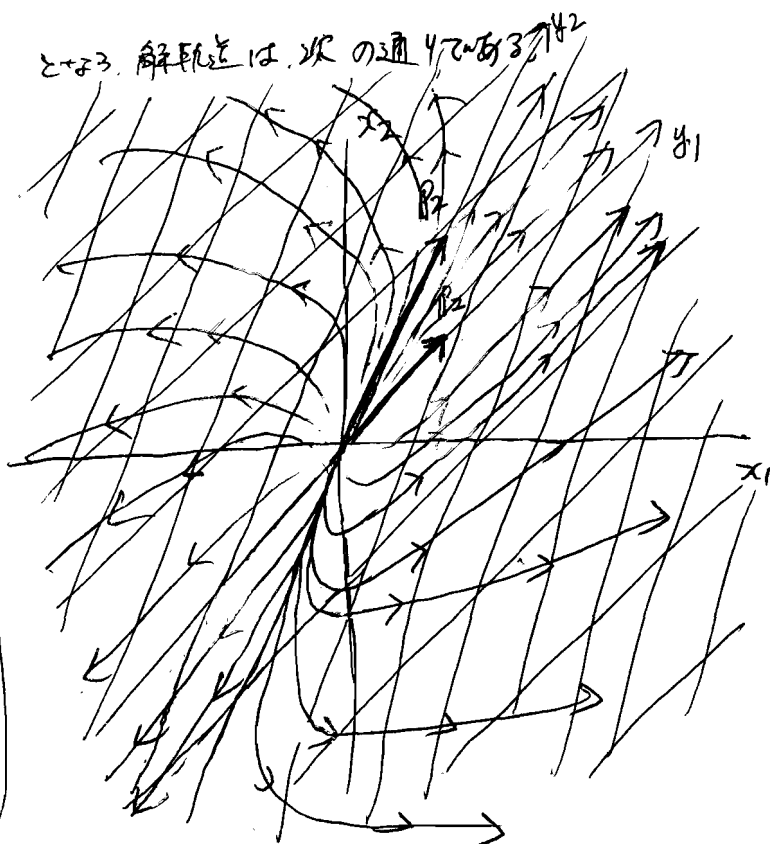
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(n) = y_1(n) + y_2(n) = 2^n y_1(0) + 3^n y_2(0) \\ x_2(n) = 2y_1(n) + 3y_2(n) = 2^{n+1} y_1(0) + 3^{n+1} y_2(0) \end{cases}$$

である。②の一般解は,

$$x(n) = \lambda_1^n (3x(0) - x(1)) + \lambda_2^n (-2x(0) + x(1))$$

と表す。解軌道は、次の通りである。



例

差分方程  $x(n+2) + 2x(n+1) + 5x(n) = 0$

离散方程系  $x(n+1) = Ax(n)$   
 $x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(n) \\ x(n+1) \end{pmatrix}$   
 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

特征方程式  
 $|A - \lambda I| = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

特征值  $\begin{cases} \lambda_1 = -1 + 2i \\ \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -1 - 2i \end{cases}$

特征向量 LIV  
 $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - 2i & 1 \\ -5 & -1 - 2i \end{pmatrix}$   
 $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 - 2i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (1 - 2i)x_1 + x_2 = 0$   
 $\Rightarrow x = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + 2i \end{pmatrix} = c |p_1|$

特征分解  
 $A = P D P^{-1}$   
 $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \text{diag}(-1 + 2i, -1 - 2i)$   
 $= \begin{pmatrix} -1 + 2i & 0 \\ 0 & -1 - 2i \end{pmatrix}$   
 $P = (p_1, p_2) = (p_1, \bar{p}_1)$   
 $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 + 2i & -1 - 2i \end{pmatrix}$

实标准形分解

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_1 \end{pmatrix} = |\lambda| \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$   $\theta = \arg(\lambda_1)$   
 $= T^{-1}(-z)$   
 $|\lambda| = \sqrt{5}$   
 $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$A = P D P^{-1}$   
 $= |\lambda| P S R(\theta) P^{-1}$   
 $= |\lambda| (P S) R(\theta) (P S)^{-1}$   
 $= |\lambda| (Q R(\theta) Q^{-1})$

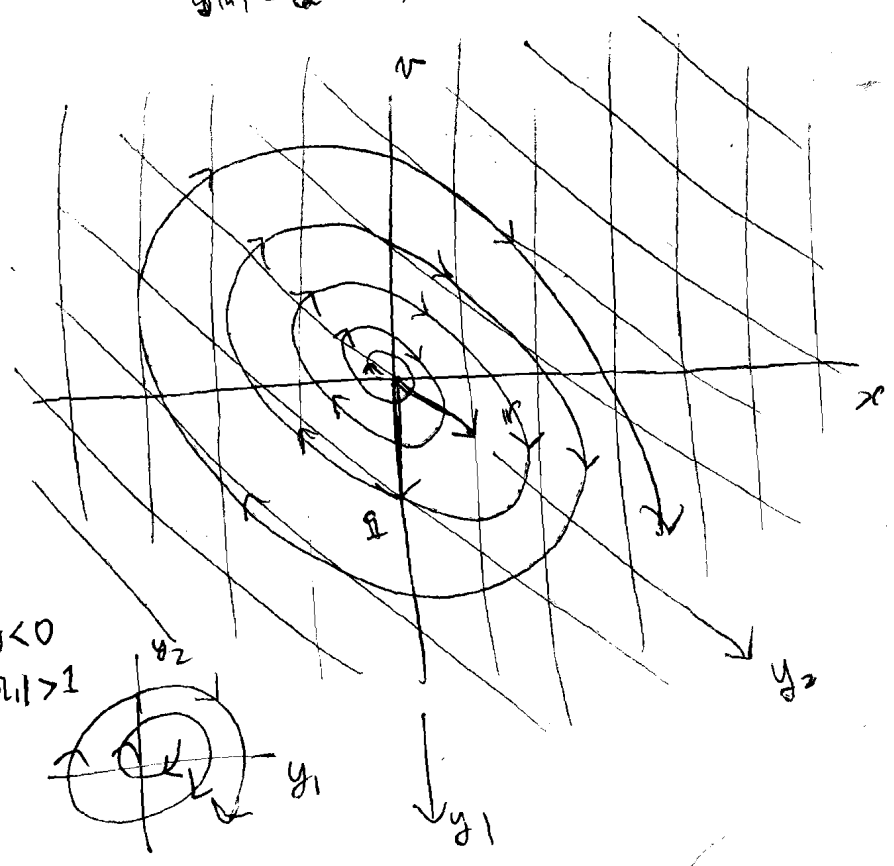
$Q = P S = (p_1, \bar{p}_1) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$   
 $= \begin{pmatrix} \frac{p_1 - \bar{p}_1}{\sqrt{2}} & \frac{p_1 + \bar{p}_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$   
 $= (r_1(n), r_2(n))$   
 $= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (q, r)$

一般解

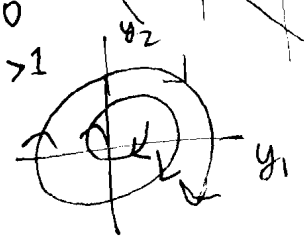
$x(n) = A^n x(0)$   
 $= (|\lambda| Q R(\theta) Q^{-1})^n x(0)$   
 $= |\lambda|^n Q R(n\theta) Q^{-1} x(0)$   
 $= |\lambda|^n Q R(n\theta) Q^{-1} x(0)$

坐标变换

$y(n) = |\lambda|^n R(n\theta) y(0)$   
 $y(n) = Q^{-1} x(n)$



$\begin{cases} \theta < 0 \\ |\lambda| > 1 \end{cases}$



# 特異値分解

## § 特異値分解

$A: n \times n$  正方形行列  $\boxed{A}^n$

固有値分解  $A = PDP^{-1}$   
 $\Downarrow$   
 対角化  $D = P^{-1}AP$

$T \in \mathbb{C}^n \left\{ \begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_n & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ P &= (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n) \\ \lambda_i &\in \mathbb{R}, p_i \in \mathbb{R}^n \\ A p_i &= \lambda_i p_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right.$   
固有行列

$A: m \times n$  長方形行列  $\boxed{A}^n$   $T \in \mathbb{C}^n$ , 簡単のため  $m \leq n$

$\sigma_i \in \mathbb{R}, u_i \in \mathbb{R}^m, v_i \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} A v_i = \sigma_i u_i & (i=1, 2, \dots, m) \\ A^T u_i = \sigma_i v_i & (i=1, 2, \dots, m) \\ A v_i = 0 & (i=m+1, \dots, n) \end{cases}$$

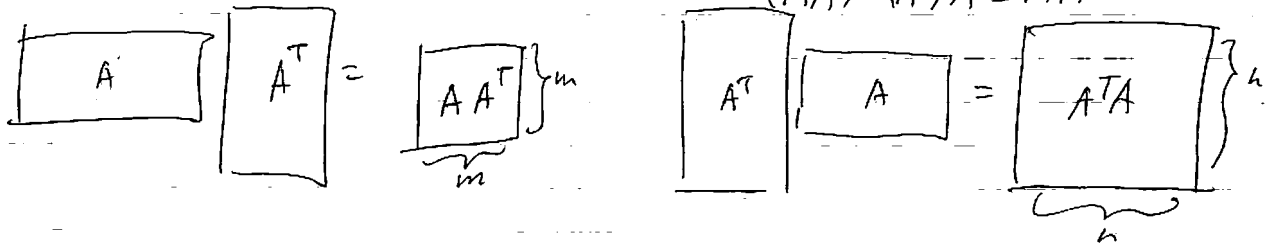
$\boxed{A}^n \begin{matrix} \uparrow \\ v \end{matrix} = \sigma \begin{matrix} \uparrow \\ u \end{matrix}^m$

$\boxed{A^T}^m \begin{matrix} \uparrow \\ u \end{matrix} = \sigma \begin{matrix} \uparrow \\ v \end{matrix}^n$

$T \in \mathbb{C}^n, \sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0, \dots, \sigma_m \geq 0.$

- $\sigma_i$ : 特異値 (singular value)
- $u_i$ : 左特異ベクトル (left singular vector)
- $v_i$ : 右特異ベクトル (right singular vector)

③注  $B=A^T A, C=AA^T$  は対称行列である。①  $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$   
 $(AA^T)^T = (A^T)^T A = AA^T$



③注 ①  $Bv_i = (A^T A)v_i = A^T (Av_i) = A^T (\sigma_i u_i) = \sigma_i (A^T u_i) = \sigma_i (\sigma_i v_i) = \sigma_i^2 v_i$   
 $\Rightarrow Bv_i = \sigma_i^2 v_i \Leftrightarrow B = A^T A$  の固有値  $\sigma_i^2$ , 固有ベクトル  $v_i$

②  $Cu_i = (AA^T)u_i = A(A^T u_i) = A(\sigma_i v_i) = \sigma_i (Av_i) = \sigma_i (\sigma_i u_i) = \sigma_i^2 u_i$

$\Rightarrow Cu_i = \sigma_i^2 u_i \Rightarrow C = AA^T$  の固有値  $\sigma_i^2$ , 固有ベクトル  $u_i$

③  $Av_i = 0 \Rightarrow A^T Av_i = A^T 0 = 0 \Rightarrow Bv_i = 0 = 0 \cdot v_i \Rightarrow Bv_i = 0 \cdot v_i \Rightarrow B$  は  $n-m$  の 0 固有  
 あり,  $B, C$  は対称行列  $A^T A$  の  $V = (v_1 \dots v_n), U = (u_1 \dots u_m)$  は直交行列  $I =$  他  
 である。

$\Rightarrow UV = I, V^T V = I$   
 $\Rightarrow U^T = U^T, V^T = V^T$

③注  $A: n \times n, A^T = A$

対称行列の異なる固有値の固有ベクトルは直交する。

①  $\left. \begin{matrix} Ax = \lambda x \\ Ay = \mu y \\ \lambda \neq \mu \end{matrix} \right\} \Rightarrow \lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (Ax, y) = (Ax)^T y = x^T A^T y = (x, A^T y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu(x, y)$   
 $\Rightarrow (\lambda - \mu)(x, y) = 0 \Rightarrow (x, y) = 0 \Rightarrow x \perp y$  ②

③注  $A: m \times n$   
 $Av_1 = 0, \dots, Av_n = 0 \Rightarrow v_{m+1} \in \text{Ker } A, v_{m+2} \in \text{Ker } A, \dots, v_n \in \text{Ker } A$  である。

$\{v_{m+1}, \dots, v_n\} \in \mathbb{R}^n$  独立に  $\mathbb{R}^n$  かつ  $\text{Ker } A = \langle v_{m+1}, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{R}}$  である。

かつ  $u_1, \dots, u_m$  の直交化して  $\{u_1, \dots, u_m\}$  は正規直交系としてとれる。

あり,  $V^T V = I$  となる。

③注  $A: n \times n, A^T = A$

対称行列の重複固有値の固有ベクトルは正規直交系としてとれる。

$Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(A - \lambda I)$

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad A v_i &= \sigma_i u_i \quad (i=1, \dots, m) \\ (2) \quad A^T u_i &= \sigma_i v_i \quad (\text{---} \text{---}) \\ (3) \quad A v_i &= 0 \quad (i=m+1, \dots, n) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} (1)(3) \Rightarrow (A v_1 \dots A v_m \quad A v_{m+1} \dots A v_n) &= (\underbrace{\sigma_1 u_1 \dots \sigma_m u_m}_m \quad \underbrace{0 \dots 0}_n) \\ \Leftrightarrow (A \underbrace{(v_1 \dots v_n)}_n) &= \underbrace{(u_1 \dots u_m)}_m \left( \begin{array}{c|c} \sigma_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \sigma_m \\ \hline & 0 \end{array} \right) \underbrace{\left. \vphantom{\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}}_m \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow AV = U\Sigma$$

$$\Leftrightarrow \underline{A = U\Sigma V^T} \quad \underline{\text{特異値分解 (SVD: singular value decomposition)}}$$

$$\begin{aligned} (2)(3) \Rightarrow (A^T u_1 \dots A^T u_m) &= (\sigma_1 v_1 \dots \sigma_m v_m) \\ \Leftrightarrow A^T (u_1 \dots u_m) &= \underbrace{(v_1 \dots v_m)}_m \underbrace{(v_{m+1} \dots v_n)}_n \left( \begin{array}{c|c} \sigma_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \sigma_m \\ \hline & 0 \end{array} \right) \underbrace{\left. \vphantom{\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}}_m \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow A^T U = V\Sigma^T$$

$$\Leftrightarrow A^T = V\Sigma^T U^T$$

$$\Leftrightarrow \underline{A = U\Sigma V^T} \quad \underline{\text{SVD}}$$

逆に書くと

$$\Sigma = \left( \begin{array}{c|c} \sigma_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \sigma_m \\ \hline & 0 \end{array} \right) = U^T A V$$

特異値標準形

長方形行列に対する

ある種の対角化

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$$

(注) 普通は特異値を大きい順に並べる。

### § 特異値と固有値

$$A = U\Sigma V^T, \quad U^T U = I, V^T V = I \text{ 等}$$

$$B = A^T A = (U\Sigma V^T)^T (U\Sigma V^T) = V \Sigma^T \overset{I}{U^T U} \Sigma V^T = V \Sigma^T \Sigma V^T$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^T \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_m^2 & \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} = V^T B V = V^T (A^T A) V$$

$B = A^T A$  の対角行列

$$C = A A^T = (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T = U \Sigma \overset{I}{V^T V} \Sigma^T U^T = U \Sigma \Sigma^T U^T$$

$$\Leftrightarrow \Sigma \Sigma^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_n^2 & \\ & & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} = U C U^T = U (A A^T) U^T$$

$C = A A^T$  の対角行列

③注  $B = A^T A$  の固有値  $\lambda_1 = \sigma_1^2, \lambda_2 = \sigma_2^2, \dots, \lambda_m = \sigma_m^2, \lambda_{m+1} = 0, \dots, \lambda_n = 0$   
 $C = A A^T$  の固有値  $\lambda_1 = \sigma_1^2, \lambda_2 = \sigma_2^2, \dots, \lambda_n = \sigma_n^2$   
 全て正。同じ。

$\Rightarrow A$  の特異値  $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sigma_n = \sqrt{\lambda_n}$   
 非負のみをえらぶ。

$B, C$  の固有値は全て非負  $\lambda_i = \sigma_i^2 \geq 0$ .

③注  $A: m \times n$   
 $\text{rank } A = r < m$  のとき  
 $(\text{rank } A^T = \text{rank } A) \quad \dim \text{Ker } A^T = \text{null } A^T = m - r > 0$   $\hookrightarrow$  存在。

$A^T u = 0$  の1次独立な解は  $m - r$  個ある。

$A^T u = 0 \cdot v$  等の特異値  $\sigma = 0$  が  $m - r$  個ある。

$\Rightarrow \sigma_{r+1} = 0, \sigma_{r+2} = 0, \dots, \sigma_m = 0$

$$A = U \Sigma V^T = U \left( \begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ \hline 0 & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & 0 & & 0 \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ \hline 0 & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & 0 & & 0 \end{array}} \right\}^m \quad n, \quad r = \text{rank } A$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$

## § 正交分解

$$A: m \times n$$

$$A = U \Sigma V^T$$

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \dots + \sigma_r u_r v_r^T \quad \underline{\underline{\text{正交分解}}}$$

$$\sigma_1 \begin{bmatrix} \times & & \\ & \times & \\ & & \times \end{bmatrix} + \sigma_2 \begin{bmatrix} \times & & \\ & \times & \\ & & \times \end{bmatrix} + \sigma_3 \begin{bmatrix} \times & & \\ & \times & \\ & & \times \end{bmatrix} + \dots$$

$$A: n \times n$$

$$A = P \Lambda P^T$$

$$A = \lambda_1 p_1 p_1^T + \lambda_2 p_2 p_2^T + \dots + \lambda_n p_n p_n^T \quad \underline{\underline{\text{正交分解}}}$$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} \times & & \\ & \times & \\ & & \times \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} \times & & \\ & \times & \\ & & \times \end{bmatrix} + \dots$$



## § ノルムのノルム

$K = \mathbb{R}$  or  $\mathbb{C}$  の数ノルム空間  $V = \mathbb{R}^n$  or  $\mathbb{C}^n$  のノルム

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$  に對して、ノルム  $\|x\|$  とは次のように定義する。

**定義**

次の (1), (2), (3) を満たす写像  $V \rightarrow \mathbb{R}$  を ノルム (norm) と呼ぶ。  
 (1)  $\|x\| \geq 0$ ;  $\|x\| = 0 \iff x = \mathbf{0}$ .

(2)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,  $\alpha \in K, x \in V$ .

(3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $x, y \in V$ .

**例**

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

2乗ノルム, (ノルムの)2-ノルム

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

絶対値ノルム

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

p乗ノルム

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$$

最大値ノルム

$$= \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

**注**

$$x \in \mathbb{C}^n \text{ のとき } (\|x\|_2)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^* x_i = x^* x$$

$$x \in \mathbb{R}^n \text{ のとき } (\|x\|_2)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot x_i = x^T x$$

**注**

$$A^* = (\overline{A})^T = (\overline{A^T})^{\leftarrow \text{複素共役}}, \quad x^* = (\overline{x})^T = (\overline{x^T})^{\leftarrow \text{複素共役}}$$



**定理**

$$\|A\|_2 = \sigma_1 \leftarrow A \text{ の最大特異値}$$

ただし  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$

(1)  $x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$  とおく。ただし  $A = U \Sigma V^T$  とする。

$$Ax = c_1 A v_1 + c_2 A v_2 + \dots + c_n A v_n = c_1 \sigma_1 u_1 + c_2 \sigma_2 u_2 + \dots + c_n \sigma_n u_n + c_{n+1} 0 + \dots + c_n 0$$

$$\begin{aligned} (\|Ax\|_2)^2 &= (c_1 \sigma_1 u_1 + \dots + c_n \sigma_n u_n)^T (c_1 \sigma_1 u_1 + \dots + c_n \sigma_n u_n) \\ &= c_1^2 \sigma_1^2 + c_2^2 \sigma_2^2 + \dots + c_n^2 \sigma_n^2 \end{aligned}$$

ただし  $\|u_i\| = 1, (u_i, u_j) = \delta_{ij}$

$$(\|x\|_2)^2 = (c_1 v_1 + \dots + c_n v_n)^T (c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2$$

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{c_1^2 + \dots + c_n^2 = 1} \sqrt{c_1^2 \sigma_1^2 + \dots + c_n^2 \sigma_n^2}$$

$$= \sqrt{\sigma_1^2} = \sigma_1 \quad \left( \begin{array}{l} \text{(2) } c_1=1, c_2=\dots=c_n=0 \text{ のとき最大値をとる。} \\ \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0 \text{ せい} \end{array} \right) \quad (2)$$

**定理**

$$A^T A = I \text{ のとき } \|A\|_2 = 1$$

$$(1) (\|Ax\|_2)^2 = (Ax)^T (Ax) = x^T \overset{I}{A^T A} x = x^T x = (\|x\|_2)^2$$

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1 \quad (2)$$

**定理**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ のとき } \|A\|_p = \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|$$

$$(1) \|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p = \max_{x_1^p + \dots + x_n^p = 1} \sqrt[p]{|a_{11}|^p |x_1|^p + \dots + |a_{nn}|^p |x_n|^p}$$

$|a_{11}|, \dots, |a_{nn}|$  のうち  $|a_{ii}|$  が最大であるとするとき、 $x_1^p=0, x_2^p=0, \dots, x_{i-1}^p=1, \dots, x_n^p=0$  のとき最大値をとる。

$$\therefore \|A\|_p = \sqrt[p]{|a_{ii}|^p} = |a_{ii}| \text{ である。} \quad (2)$$

**定理**

$$A: n \times n, \text{ 正則} \text{ のとき } \|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_n} = \frac{1}{\lambda_n} \leftarrow \text{最小特異値(固有値)の逆数}$$

$$\text{ただし } \begin{cases} \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \end{cases}$$

定義

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

Frobenius norm  
Frobenius norm

行列の2-ノルム

定理

 $\|A\|_F$  は  $n \times n$  の (1)~(4) の性質を満たす。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \textcircled{4} (\|AB\|_F)^2 &= \sum_i \sum_j \left( \sum_k a_{ik} b_{kj} \right)^2 \leq \sum_i \sum_j \left( \sum_k |a_{ik}| |b_{kj}| \right)^2 \\ &\leq \sum_i \sum_j \left( \sum_k |a_{ik}|^2 \right) \left( \sum_l |b_{lj}|^2 \right) = \left( \sum_i \sum_k |a_{ik}|^2 \right) \left( \sum_j \sum_l |b_{lj}|^2 \right) = \|A\|_F^2 \|B\|_F^2 \quad \square \end{aligned}$$

定理

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_m^2}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \|A\|_F &= \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \sqrt{\text{tr}(U \Sigma V^T)^T (U \Sigma V^T)} = \sqrt{\text{tr}(V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T)} \\ &= \sqrt{\text{tr}(V \Sigma^T \Sigma V^T)} = \sqrt{\text{tr}(\Sigma^T \Sigma \underbrace{V V^T}_I)} = \sqrt{\text{tr}(\Sigma^T \Sigma)} \\ &= \sqrt{\text{tr} \left( \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_m^2 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \ddots & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{matrix} \end{array} \right)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_m^2} \quad \square \end{aligned}$$

定理

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F$$

$$\textcircled{1} \quad \|A\|_2 = \sigma_1 \leq \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_m^2} = \|A\|_F \quad \square$$

## § 行列のトレース

行列のトレース  $\text{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ ,  $A: n \times n$ 

定理

(1)  $\text{tr}(A+B) = \text{tr} A + \text{tr} B$

(2)  $\text{tr} A^T = \text{tr} A$

(3)  $\text{tr} \alpha A = \alpha \text{tr} A$

(4)  $\text{tr} AB = \text{tr} BA$

**定義**

$A: n \times n$  固有値の集合  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \leftarrow$  スペクトル (spectrum)

$A: m \times n$  特異値の集合  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$

スペクトル半径  $\rho(A) = \max_{\lambda=1, \dots, n} |\lambda_i|$

$$\rho(A) = \max_{\lambda=1, \dots, m} \sigma_{\lambda}$$

**定理**

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

①  $\|A\|_2 = \sigma_1 = \rho(A) = \max(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \Rightarrow \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m$  ②

**定理**

$$\|A\|_p \geq \rho(A) \quad (p=1, 2, \dots, \infty)$$

**定理**

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p$$

①  $\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p = \max_{\|x\|_p} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \Leftrightarrow \|A\|_p \geq \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$   
②  $\|A\|_p \|x\|_p \geq \|Ax\|_p$  ③

## 条件数

定義

$$A: n \times n$$

$$\text{cond}_p A = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p \quad \text{条件数 (Condition number)}$$

例

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ のとき } \quad \text{cond}_p A = \frac{\max_i |a_{ii}|}{\min_i |a_{ii}|}$$

$$A^T A = I \text{ のとき } \quad \text{cond}_2 A = 1$$

$$A \text{ の特異値 } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \text{ のとき } \quad \text{cond}_2 A = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \quad \left( \text{最大と最小の比} \right)$$

注

条件数の大きい行列のほど、 $\sigma$  の数値計算プログラムの数値誤差の拡大が起りやすいことが知られている。

注

$$\text{cond}_p A \geq \frac{1}{\epsilon_n} \text{ であるとき悪条件であること}$$

ただし、 $\epsilon_n$  は マシンエローション。

倍精度  $\epsilon_4 = 2^{-54} \approx 10^{-16} \sim 10^{-16}$

単精度  $\epsilon_4 = 2^{-26} \approx 10^{-7} \sim 10^{-8}$

## § 一般逆行列

**定義**  $A: m \times n$

$$\begin{array}{cccc} & \uparrow & & \uparrow \\ & m \times n & & m \times n \\ A & A & A & A \\ & \uparrow & & \uparrow \\ & n \times m & & n \times n \end{array} = A$$

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$A^-$ : 一般逆行列 (generalized inverse)

擬逆行列 (pseudo inverse)

**注** rank(A) < n ではない。

一意に定まるとは限らない。

★ A: 正則のとき  $A^- = A^{-1}$

**定理**  $y = Ax$  の解は  $x = A^-y \iff AA^-A = A$  (Rao, 1962)

( $\Leftarrow$ )  $AA^-A = A \Rightarrow AA^-Ac = \underbrace{A}c \Rightarrow \underbrace{AA^-y}_x = y \Rightarrow x = A^-y$  は  $Ax = y$  の解

( $\Rightarrow$ )  $Ax = y, x = A^-y, y = Ac \Rightarrow AA^-Ac = Ac \Rightarrow AA^-A = A$  □

**定義**  $A: m \times n$

$$\begin{array}{l} AA^+A = A, A^+AA^+ = A^+ \\ (AA^+)^* = AA^+, (A^+A)^* = A^+A \end{array}$$

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$

Moor-Penrose 解  
一般逆行列

**定理**  $y = Ax$  かつ  $x = A^+y$  が解。

( $\Leftarrow$ )  $y = Ax \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow y = AA^+y \\ x = A^+y \end{array} \right. \Rightarrow A^+y = A^+AA^+y = A^+y \Rightarrow A^+y = A^+y$  □

**定理**  $A^+$  は一意に定まり,  $(A^+)^+ = A$  が成立する。 (Kalman, 1972)

定理

$$A^T = V \Sigma^+ U^T, \quad \Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{\sigma_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\sigma_m} \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\Sigma^+} \right\} m \right\} n.$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $n \times n \quad m \times m \quad n \times m \quad m \times m$

$$\text{E.E.V. } A = U \Sigma V^T, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_m \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $m \times n \quad m \times m \quad n \times m \quad n \times n$

$$\begin{aligned} \text{(i) } AA^T A &= U \Sigma V^T V \Sigma^+ U^T U \Sigma V^T \\ &= U \Sigma I \Sigma^+ I \Sigma V^T = U \Sigma \Sigma^+ \Sigma V^T = U \Sigma V^T = A \quad \square \end{aligned}$$



## § 例11

$$\text{例11)} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 30 \\ 10 & 5 & 15 \\ 30 & 15 & 45 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = A A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 28 & 56 \end{pmatrix} = 14 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 14 - \lambda & 28 \\ 28 & 56 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 14)(\lambda - 56) - 28^2 = \lambda^2 - 70\lambda + 4 \times 14^2 - 4 \times 14^2 \\ = \lambda^2 - 70\lambda = \lambda(\lambda - 70) = 0 \Rightarrow C \text{ の固有値 } \lambda = 0, 70.$$

A の特異値は  $\sigma_1 = \sqrt{70}$ ,  $\sigma_2 = 0$  であり,

$$\|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{70}, \quad \|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{70 + 0} = \sqrt{70} \text{ である。}$$

$$\text{また、} \|A\|_F = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{70} \text{ として等しい。}$$

$$\text{例12)} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = A A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 \\ -3 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 6)^2 - (-3)^2 = \lambda^2 - 12\lambda + 36 - 9 = \lambda^2 - 12\lambda + 27 \\ = (\lambda - 3)(\lambda - 9) = 0 \Rightarrow \lambda = 3, 9.$$

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5 - \lambda & -4 \\ -1 & -4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda - 5)^2 - 4 - 4 + (\lambda - 5) + (\lambda - 5) + 16(\lambda - 2) \\ = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 10\lambda + 25) + 16\lambda - 50 \\ = -(\lambda^3 + 10\lambda^2 - 25\lambda + 2\lambda^2 + 20\lambda + 50 + 16\lambda - 50) \\ = -\lambda(\lambda^2 - 12\lambda + 27) = -\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 9) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 3, 9$$

$$\lambda_1=9, \lambda_2=3, \lambda_3=0 \text{ 故) } A \text{ の 特 異 値 は } \begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{9} = 3 & \text{と} \text{ 2 回} \\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\|A\|_2 = \sigma_1 = 3 \text{ と} \text{ 考} \text{ へ} \text{ る}.$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} \text{ と} \text{ 考} \text{ へ} \text{ る},$$

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{12} \text{ と} \text{ 考} \text{ へ} \text{ る} \text{ 事} \text{ 可} \text{ し}.$$

特異値の順序を求めよ。

$$(C - \lambda I)x = 0 \text{ 故) }.$$

$$\underline{\lambda=9 \text{ の 時}} \quad C - 9I = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda=3 \text{ の 時}} \quad C - 3I = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(B - \lambda I)x = 0 \text{ 故) }.$$

$$\underline{\lambda=9 \text{ の 時}} \quad B - 9I = \begin{pmatrix} -9 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ -1 & -4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{c}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda=3 \text{ の 時}}$$

$$B - 3I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda=0 \text{ の 時}}$$

$$B - 0I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_3 = \frac{c}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aの特異値分解(SVD)は

$$A = U \Sigma V^T, \quad U = (u_1 \ u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = (v_1 \ v_2 \ v_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

とすると  $\Rightarrow$  同様の Moore-Penrose  $\Rightarrow$   $u_1, u_2, v_1, v_2$  の正負は  $Av_i = \sigma_i u_i$  が成り立つように選ぶ。  
Aの一般逆行列は

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  のとき  $AA^+A = A, A^+AA^+ = A^+$   $\left( \begin{matrix} AA^+A = A \\ A^+AA^+ = A^+ \end{matrix} \right)$  が成り立つ

$Ax = y$  の解  $x$  は  $x = A^+y$  である。  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}$  と表す。

$\Rightarrow$   $Ax = y$  の解を簡潔に表わすと

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & y_1 \\ 1 & 1 & -2 & | & y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 \\ 0 & 1 & -1 & | & \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 \end{pmatrix} \text{ となり } x = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 \\ \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ と表す。}$$

$c = -\frac{1}{3}y_1$  のとき  $x = A^+y$  と一致する。これは  $\|x\|$  が最小と表すときである。

$$\|x\|^2 = \left(c + \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2\right)^2 + \left(c + \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2\right)^2 + c^2 = y$$

$$\frac{\partial \|x\|^2}{\partial c} = -3c + y_1 = 0 \text{ を求めると } c = -\frac{y_1}{3} \text{ のとき最小値をとる。}$$

$\Rightarrow$  方程式  $Ax = y$  は任意性があっても一意には定まらない。

$x = A^+y$  は  $\|x\|_2^2$  が最小と表すときの解である。

$c = \frac{a}{3}y_1 + \frac{b}{3}y_2$  とおくと.

$$x = \begin{pmatrix} c + \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 \\ c + \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (a+2)y_1 + (b+1)y_2 \\ (a+1)y_1 + (b-1)y_2 \\ ay_1 + by_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a+2 & b+1 \\ a+1 & b-1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = Ay, A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a+2 & b+1 \\ a+1 & b-1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

と表す。このとき

$$AA^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+2 & b+1 \\ a+1 & b-1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

よみたすので  $A^{-1}$  は  $A$  の一般逆行列である。

(注)  $a, b$  は任意であるから、 $A$  の一般逆行列  $A^{-1}$  は一意には定まらない。

(問)  $A^{-1}$  から  $A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}, (AA^{-1})^T = AA^{-1}, (A^{-1}A)^T = A^{-1}A$  といったときの  $a, b$  の条件を定めよ。

(問)  $x = A^{-1}y$  の  $\|x\|_2$  が最小となる  $a, b$  を定めよ。

$$① \quad \|x\|_2^2 = \frac{1}{9} \left\{ (a+2)y_1 + (b+1)y_2 \right\}^2 + \left\{ (a+1)y_1 + (b-1)y_2 \right\}^2 + \left\{ ay_1 + by_2 \right\}^2 \neq 0$$

$$\frac{\partial \|x\|_2^2}{\partial a} = \frac{2}{3} y_1 \{ (a+1)y_1 + by_2 \} = 0$$

$$\frac{\partial \|x\|_2^2}{\partial b} = \frac{2}{3} y_2 \{ (a+1)y_1 + by_2 \} = 0$$

よって  $a=1, b=0$  のとき  $\|x\|_2^2$  は最小値をとり、最小値をとる。 (2)

## § 正規行列

**定義**

$$A: n \times n$$

$$A^*A = AA^* \xLeftrightarrow{\text{def}} A: \text{正規行列 (normal matrix)}$$

**定義**

$$A^* = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)} : \text{共役転置}$$

**例**

エルミート行列  $A^* = A$   
(Hermitian matrix)

$$\textcircled{1} \begin{cases} A^*A = AA = A^2 \\ AA^* = AA = A^2 \end{cases}$$

歪エルミート行列  $A^* = -A$   
(skew Hermitian matrix)

$$\textcircled{2} \begin{cases} A^*A = -AA = -A^2 \\ AA^* = -AA = -A^2 \end{cases}$$

ユニタリ行列  $A^*A = AA^* = I$   
(unitary matrix)

$$\textcircled{3} \text{ 同5p.1}$$

対称行列  $A^T = A$   
(symmetric mat.)

$$\textcircled{1} \begin{cases} A^*A = A^T A = AA = A^2 \\ AA^* = AA^T = AA = A^2 \end{cases}$$

歪対称行列 (skew sym. mat.)

交代行列 (alternating mat.)

$$\left. \begin{matrix} A^T = -A \\ A^*A = A^T A = -AA = -A^2 \\ AA^* = AA^T = -AA = -A^2 \end{matrix} \right\} \textcircled{2}$$

直交行列  $A^T A = AA^T = I$   
(orthogonal matrix)

$$\textcircled{1} \begin{cases} A^*A = A^T A = I \\ AA^* = AA^T = I \end{cases}$$

**定理**

$$A^*A = AA^* \Rightarrow \text{異なる固有値の固有ベクトルは直交}$$

**定理**

$$A^*A = AA^* \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = U^* A U, U: \text{ユニタリ行列}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = U^T A U, U: \text{直交行列}$$

## § 正定値

**定義**  $A: n \times n, x \in \mathbb{C}^n$

$$h(x; A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_i x_j = x^* A x = (x, A x) \in \mathbb{R}$$

エルミート二次形式 (Hermite quadratic)

**定義**  $x, y \in \mathbb{C}^n$

内積  $(x, y) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i = x^* y \in \mathbb{R}$

**注**  $A: \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}$  行列  $\Rightarrow \overline{h(x)} = h(x)$

**定義**  $h(x; A) > 0 \stackrel{\text{def}}{\iff} A: \text{正定値 (positive-definite)}$

$h(x; A) \geq 0 \iff A: \text{非負定値, 半正定値}$

$h(x; A) < 0 \iff A: \text{負定値 (negative-definite)}$

$h(x; A) \leq 0 \iff A: \text{非正定値, 半負定値}$   
(non positive-) (positive-semidefinite)

**定理**  $A: \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}$  行列, 対称行列

$$h(x; A) > 0 \iff \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0$$

(1)  $A$  はエルミート行列で対称行列であるから,  $A p_i = \lambda_i p_i, (p_i, p_j) = \delta_{ij}$  として

$x = c_1 p_1 + \dots + c_n p_n$  とおく。このとき

$$A x = c_1 A p_1 + \dots + c_n A p_n = c_1 \lambda_1 p_1 + \dots + c_n \lambda_n p_n \text{ である}$$

$$h = (x, A x) = (c_1 p_1 + \dots + c_n p_n, c_1 \lambda_1 p_1 + \dots + c_n \lambda_n p_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda_j \bar{c}_i c_j (p_i, p_j)$$

$$= \sum_{j=1}^n \lambda_j |c_j|^2 = \lambda_1 |c_1|^2 + \dots + \lambda_n |c_n|^2$$

よって,  $|c_1|^2, \dots, |c_n|^2$  は任意の非負実数であるから,  $h > 0$  となるのは,

$\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$  のときのみである。

(2)  $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}$  行列, 対称行列の固有値はすべて実数

**定理**  $\begin{cases} A: m \times n \\ B = A^*A: n \times n \end{cases}$  は  $\begin{cases} B: \text{正定値} \Leftrightarrow B \text{の固有値は} \\ B: \text{正定値行列} \quad \text{全正} \end{cases}$

(:)  $h = (x, Bx) = x^* B x = x^* A^* A x = \underbrace{(Ax)^*}_{y^*} \underbrace{(Ax)}_y = y^* y = (y, y) = \|y\|^2 > 0$   
 $\Leftrightarrow B \text{の固有値は正} \quad \square$

**定理**  $A: n \times n$ , 正規行列, 正定値

$\Rightarrow$  固有値分解と特異値分解は一致.

(:) SVD:  $A = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix} V^*$   
 $\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ n \times n & & n \times n & & n \times n \end{matrix}$

$A^*A = AA^*$  により  $B = A^*A$  と  $C = AA^*$  の固有値, 固有ベクトルは同じで変換が  $U = V$  とおける.  $\square$

$A = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix} U^*$  であり, これは固有値分解である.  $\square$